Klassifikation der JBW*-Tripel vom Typ I

Dissertation
der
Mathematischen Fakultät
der Eberhard-Karls-Universität
zu Tübingen

zur Erlangung des Grades eines
Doktors der Naturwissenschaften

vorgelegt von Günther Horn aus Stuttgart
1984

Klassifikation der JBW*-Tripel vom Typ I

Dissertation
der
Mathematischen Fakultät
der Eberhard-Karls-Universität
zu Tübingen

zur Erlangung des Grades eines
Doktors der Naturwissenschaften

vorgelegt von Günther Horn aus Stuttgart
1984

Tag der mündlichen Prüfung:	19. Dezember 1984
Dekan:	Professor Dr. W. Kaup
1. Berichterstatter:	Professor Dr. W. Kaup
2. Berichterstatter:	Professor Dr. R. B. Braun

Inhaltsverzeichnis

	Seite
Einleitung	1
§1 Jordan - $*$ - Tripel	5
§2 JB^*-Tripel	11
§3 JBW^*-Tripel - Charakterisierungen des Präduals	17
§4 Ein Fortsetzungssatz	29
§5 Ideale in JBW^*-Tripeln	32
§6 Beispiele	38
§7 Rein alternative W^*-Algebren	58
§8 Koordinatisierungssätze	63
§9 Klassifikation	81
§9.1 Der Klassifikationssatz	81
§9.2 Typ I_1	83
§9.3 Typ I_2	89
§9.4 Der rechteckige Typ	96
§9.5 Der antisymmetrische Typ	101
§9.6 Der symmetrische Typ	106
§9.7 Der Ausnahme-Typ	107
Literaturverzeichnis	109
Liste der Bezeichnungen	113

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41536517_0001

Einleitung

In einer Reihe von Arbeiten legten Mitte der dreißiger Jahre P.Jordan,J.von Neumann und E.Wigner den Grundstein für die Theorie der Jordan-Algebren.Eine gute Übersicht über ihre Entwicklung bis zum Ende der siebziger Jahre bietet der Artikel von McCrimmon [Mc1] .
Schon bald stellte sich dabei das aus dem Jordan-Algebraprodukt gebildete Jordan-Tripelprodukt
$\{abc\} := a(bc) - b(ac) + c(ab)$ als ein wesentliches Hilfsmittel heraus.Eine abstrakte Definition von Jordan-Tripelsystemen,die die bezüglich des Jordan-Tripelprodukts abgeschlossenen Unterräume von Jordan-Algebren umfaßte,wurde 1970 von Meyberg im Zusammenhang mit der Koecher-Konstruktion von Lie-Algebren gegeben [Me1] .Als ein wichtiges Anwendungsgebiet für Jordan-Tripelsysteme erwiesen sich in der Folge die in der Komplexen Analysis betrachteten beschränkten symmetrischen Gebiete (siehe [Lo2] , [Ka1] , [Ka3] ,[Ka4]).
Die Untersuchung beschränkter symmetrischer Gebiete unendlicher Dimension führte zum Begriff des JB^*-Tripels,eines komplexen Jordan-Tripelsystems mit vollständiger Norm.JB^*-Tripel sind eine Verallgemeinerung von JB^*-Algebren,den Jordan-Algebra-Analoga der C^*-Algebren.Bei JB^*-Tripeln wie bei JB^*-Algebren ist dabei die entscheidende Bedingung an die Norm die Gültigkeit von $\|\{zz^*z\}\| = \|z\|^3$ für alle Elemente z.
Die Bedeutung von JB^*-Tripeln ergibt sich aus dem von Kaup in [Ka4] bewiesenen Satz,daß die beschränkten symmetrischen Gebiete in komplexen Banachräumen (bis auf biholomorphe Äquivalenz) genau die offenen Einheitskugeln von JB^*-Tripeln sind.
Auch unter funktionalanalytischen Gesichtspunkten sind JB^*-Tripel von Interesse:Friedman und Russo zeigten,daß das Bild einer kontraktiven Projektion auf einer C^*-Algebra in natürlicher Weise ein JB^*-Tripel ist (siehe [F1] , [Ka5]).

Die hier betrachteten JBW^*-Tripel sind JB^*-

Tripel,die als Banachräume einen Prädual besitzen.Sie zeichnen sich durch die Existenz "vieler" Tripotente aus,was für Strukturuntersuchungen wesentlich ist (Tripotente sind Elemente z mit $\{zz^*z\} = z$.) :In §3 wird gezeigt,daß die Menge der Tripotente in einem JBW*-Tripel norm-total ist - während ein JB*-Tripel im allgemeinen keine Tripotente besitzt.Die Rolle der Tripotente in der Theorie der JB*-Tripel entspricht derjenigen der Projektionen in der Theorie der JB*-Algebren.Analog zu JB*-Algebren kann man abelsche Tripotente definieren und erhält für JBW*-Tripel eine eindeutige Zerlegung in ein Ideal "vom Typ I",das als schwach - $*$ - abgeschlossenes Ideal von einem abelschen Tripotent erzeugt wird,und ein Ideal,das keine abelschen Tripotente enthält.

In dieser Arbeit werden in den §§3-5 Sätze über JBW*-Tripel im allgemeinen bewiesen;in den §§6-9 werden die JBW*-Tripel vom Typ I bis auf isometrische Isomorphie bestimmt.

Im einzelnen ist die Arbeit wie folgt aufgebaut:

Die §§ 1 und 2 haben vorbereitenden Charakter.In ihnen werden die in der Literatur verstreuten grundlegenden Definitionen und Sätze (mit einigen Erweiterungen) über algebraische Aspekte von Jordan-Tripelsystemen (§1) und über JB*-Tripel und ihre Beziehung zu JB*-Algebren (§2) sowie technische Hilfsmittel bereitgestellt.

In §3 werden JBW*-Tripel eingeführt.Der Prädual wird auf verschiedene Weisen charakterisiert und seine Eindeutigkeit wird bewiesen.

In §4 wird ein Fortsetzungssatz für Tripelisomorphismen bewiesen,der in §5 und in §8 angewandt wird.

In §5 wird die Idealstruktur von JBW*-Tripeln untersucht. Insbesondere werden Zusammenhänge zwischen Idealen in einem JBW*-Tripel und Idealen in der natürlichen Jordan-Algebra-Struktur auf Peirce-1-Räumen vollständiger Tripotente hergestellt.

In §6 werden als Beispiele zunächst die sechs Typen von

Cartan-Faktoren vorgestellt:Es sind die Räume aller beschränkten linearen Operatoren von einem komplexen Hilbertraum in einen anderen,die Räume der symmetrischen und der antisymmetrischen Operatoren auf einem komplexen Hilbertraum,die Spinfaktoren sowie der Raum der 1x2 - Matrizen über den komplexen Cayley-Zahlen und der Raum der hermiteschen 3x3 - Matrizen über den komplexen Cayley-Zahlen.
Wie in §9 gezeigt wird,sind die Cartan-Faktoren genau die unzerlegbaren JBW*-Tripel vom Typ I.
Im zweiten Teil von §6 ergeben sich als weitere Beispiele für JBW*-Tripel vom Typ I Räume beschränkter,schwach meßbarer Funktionen auf lokalkompakten Räumen mit positiven Radonmaßen mit Werten in Cartan-Faktoren.
Das Hauptresultat dieser Arbeit,der Klassifikationssatz (9.1.1),besagt,daß jedes JBW*-Tripel vom Typ I isometrisch isomorph zu einer ℓ^∞-direkten Summe von Idealen der letztgenannten Bauart ist.
Im dritten Teil von §6 werden unter anderem die Ergebnisse der Klassifikation der JBW*-Algebren vom Typ I ([Stø], [St1], [St2]) zusammengestellt.Sie gehen zwar in den Beweis des Klassifikatiossatzes ein,für den Hauptteil des Beweises müssen jedoch grundsätzlich andere Methoden verwandt werden, da sich die Klassifikation der JBW*-Algebren vom Typ I entscheidend auf das Gelfand-Neumark-Theorem für JB-Algebren [A2] stützt und die Gültigkeit eines entsprechenden Satzes für JB*-Tripel noch zu den offenen Problemen der Theorie gehört.
In §8 werden dazu Koordinatisierungssätze für endlich-dimensionale Jordan-Tripelsysteme [Mc] auf JBW*-Tripel verallgemeinert.Die auftretenden Koordinatenalgebren sind dabei alternative W*-Algebren.Deshalb wird deren Struktur vorab in §7 untersucht.
Der Beweis des Klassifikationssatzes in §9 erfolgt schließlich durch eine Anwendung der Koordinatisierungssätze.

An dieser Stelle möchte ich Herrn Professor Kaup für die Anregung zu dieser Arbeit und die gewährte Unterstützung ebenso wie Herrn Professor Braun für seine ständige Gesprächsbereitschaft und wertvolle Hinweise herzlich danken.

§ 1 Jordan - $*$ - Tripel

In diesem Paragraphen werden häufig benutzte Definitionen und Sätze zusammengestellt. Als Standardreferenz werden [Lo2], [Me] verwandt. Alle nicht erläuterten Begriffe und nicht angegebenen Beweise sind dort zu finden.

(1.1) Ein Vektorraum V mit einer bilinearen Verknüpfung heiße (lineare) Jordan-Algebra, wenn für alle $x,y \in V$ gilt:

(1.2) $x(x^2y) = x^2(xy)$

(1.3) $xy = yx$.

Ein antilinearer, involutorischer Algebra-Automorphismus $x \mapsto x^*$ einer komplexen Jordan- Algebra heiße Involution. Eine komplexe Jordan- Algebra mit Involution "$*$" heiße auch eine Jordan - $*$ - Algebra.

Ein Element $e \neq 0$ einer Jordan - $*$ - Algebra heiße Projektion, wenn $e = e^2$ und $e = e^*$ gilt.

(1.4) $Z(V) := \{ z \in V \mid z(xy) = x(zy)$ für alle $x,y \in V \}$ heißt das Zentrum der Jordan- Algebra V.
Z(V) ist eine assoziative Unteralgebra von V.

(1.5) Ein komplexer Vektorraum U mit einer sesquilinearen Abbildung $U \times U \longrightarrow End(U) : (x,y) \mapsto x \sqcup y^*$ heiße ein Jordan - $*$ - Tripel, wenn gilt:

(1.6) Das Tripelprodukt $\{xy^*z\} := x \sqcup y^*(z)$ ist symmetrisch in x und z,

(1.7) $\{uv^*\{xy^*z\}\} = \{\{uv^*x\}y^*z\} - \{x\{vu^*y\}z\} + \{xy^*\{uv^*z\}\}$ für alle $u,v,x,y,z \in U$.

(1.8) Es sei $Q(x,z)y := \{xy^*z\}$, $Q(x) := Q(x,x)$ für alle $x,y,z \in U$.

(1.9) Bemerkung: Die Definition (1.5) stimmt überein mit der

Definition von "hermitian Jordan triple system" in [Lo2,2.9]. Bezeichnet man mit $U_{\mathbb{R}}$ die unterliegende reelle Struktur von U,so ist $(U_{\mathbb{R}},Q)$ ein (reelles) Jordan-Tripelsystem im Sinne von [Me,$\overline{X}$],[Mc],[N].Resultate aus [Me],[Mc],[N] lassen sich in vielen Fällen einfach auf Jordan -$*$- Tripel übertragen, indem man zunächst $U_{\mathbb{R}}$ betrachtet und dann die Verträglichkeit mit der komplexen Struktur prüft.
Man beachte ferner,daß in [Me],[Mc],[N] an Stelle von (1.8) die Relationen $2P(x)z = P(x,x)z = L(x,z)x = \{xzx\}$ gelten.

Die Begriffe Untertripel,Homomorphismus,Isomorphismus seien in naheliegender Weise definiert.

(1.10) Für ein Jordan -$*$- Tripel U gilt die durch unmittelbares Nachrechnen zu überprüfende Polarisationsformel
$4x \square y^* = \sum_{\varepsilon^4=1} \varepsilon(x + \varepsilon y) \square (x + \varepsilon y)^*$ für alle $x,y \in U$.
Jede Jordan -$*$- Algebra V ist ein Jordan -$*$- Tripel mit dem Produkt
(1.11) $\{xy^*z\} = x(y^*z) - y^*(xz) + z(xy^*)$ für $x,y,z \in V$.
[Lo2,3.7]

Ein Jordan -$*$- Tripel U heiße abelsch,wenn $x \square y^*$ und $u \square v^*$ für alle $x,y,u,v \in U$ kommutieren,oder - was äquivalent ist - wenn $\{xy^*\{uv^*w\}\} = \{\{xy^*u\}v^*w\}$ für alle $x,y,u,v,w \in U$ gilt.
Die Äquivalenz der Bedingungen zeigt man mit (1.6).

Ein Element $e \neq 0$ in einem Jordan -$*$- Tripel heißt ein Tripotent,wenn $Q(e)e = e$ ist.
Jede Projektion in einer Jordan -$*$- Algebra ist ein Tripotent in dem Produkt (1.11).

(1.12) Zu jedem Tripotent e in U gibt es eine Zerlegung von U in die Eigenräume von $e \square e^*$,die Peirce - Zerlegung
$U = U_1(e) \oplus U_{1/2}(e) \oplus U_0(e)$,wobei für $k = 0,1/2,1$

$U_k(e) := \{z \in U \mid \{ee^*z\} = kz\}$ ist.
$U_k := U_k(e)$ heiße der Peirce -k- Raum von e. [Me, XV]

(1.13) Es gelten die Multiplikationsregeln [Me, XV Th 1]:
(1) $\{U_1 U_o^* U\} = \{U_o U_1^* U\} = 0$,
(2) $\{U_i U_j^* U_k\} \subset U_{i-j+k}$,wobei $i,j,k \in \{0,1/2,1\}$ und $U_l := 0$ für $l \neq 0,1/2,1$.
Insbesondere sind also die Peirce - Räume Untertripel von U.

(1.14) Die natürliche Projektion $p_k = p_k^e$ von U auf U_k (d.h. diejenige Projektion,für die gilt $p_k(z) = z$ für $z \in U_k$, $p_k(z) = 0$ für $z \in U_j, j \neq k$) heiße Peirce -k- Projektion von e.
Es gilt $p_1^e = 2(e \square e^*)^2 - e \square e^*$, $p_{1/2}^e = 4(e \square e^* - (e \square e^*)^2)$,
$p_o^e = Id - 3e \square e^* + 2(e \square e^*)^2$.
p_k^e ist also ein ganzzahliges Polynom in $e \square e^*$.
Es gilt ferner $p_1^e = Q(e)^2$.
Daraus und aus (1.13) folgt $U_1(e) = Q(e)U$.

(1.15) $U_1(e)$ wird mit dem Produkt
$xy := \{xe^*y\}$ und der Involution $x^* := \{ex^*e\} = Q(e)x$ für $x,y \in U_1(e)$ zu einer Jordan -$*$- Algebra mit Eins e.
[Lo2, Th 3.13]
Das gemäß (1.11) auf der Jordan -$*$- Algebra $U_1(e)$ gebildete Tripelprodukt stimmt mit dem ursprünglichen überein.
[Me, XV Lemma 2]

(1.16) Ein Tripotent f in U heiße e-Projektion,wenn f Projektion in der Jordan -$*$- Algebra $U_1(e)$ (im Sinne von (1.15)) ist.
Liegt f zusätzlich im Zentrum von $U_1(e)$,so heiße f eine e-zentrale Projektion.

(1.17) Zwei Tripotente e und f heißen verträglich,wenn $p_j^e p_k^f = p_k^f p_j^e$ für alle $j,k \in \{0,1/2,1\}$ gilt.

Bezüglich einer endlichen Familie $f_1,\ldots,f_n$ paarweise verträglicher Tripotente gibt es eine gemeinsame Peirce-Zerlegung: $U = \bigoplus_{k_i \in \{0,1/2,1\}} U_{k_1}(f_1) \cap \ldots \cap U_{k_n}(f_n)$

(1.18) Gilt $f \in U_k(e)$ für ein $k \in \{0,1/2,1\}$, so sind e und f verträglich: Nach (1.14) genügt es zu zeigen, daß $e \square e^*$ und $f \square f^*$ vertauschen, was mit (1.7) folgt.

Insbesondere sind e und f verträglich, wenn
e und f <u>orthogonal</u> sind ($e \perp f$), d.h. $e \in U_0(f)$ und damit nach [Lo2,3.9] $e \square f^* = f \square e^* = 0$ gilt;
e und f <u>kollinear</u> sind, d.h. $e \in U_{1/2}(f)$ und $f \in U_{1/2}(e)$ gilt;
e und f <u>streng kollinear</u> sind ($e \top f$), d.h. $U_1(e) \subset U_{1/2}(f)$ und $U_1(f) \subset U_{1/2}(e)$ gilt.
(Der Gebrauch des Symbols "$\top$" weicht von [Mc], [N] ab.)

Eine Familie von Tripotenten heiße verträglich (orthogonal, kollinear, streng kollinear), wenn je zwei verschiedene Glieder dieser Familie verträglich (orthogonal, kollinear, streng kollinear) sind.

(1.19) Ein Tripotent e in U heiße <u>vollständig</u>, wenn $U_0(e)=0$ oder - was äquivalent ist - wenn $e \square e^*$ invertierbar ist.
e heiße <u>unitär</u>, wenn $U = U_1(e)$, d.h. $e \square e^* = Id$ ist.

(1.20) Für eine orthogonale Familie $\mathcal{E} = (e_i)_{i \in I}$ von Tripotenten in U definiert man die <u>Peirce-Räume (bezüglich $\mathcal{E}$)</u> für $i,j \in I, i \neq j$, durch:

$U_{ii} := U_{e_i,e_i} := U_1(e_i)$,
$U_{ij} := U_{e_i,e_j} := U_{1/2}(e_i) \cap U_{1/2}(e_j)$,
$U_{io} := U_{oi} := U_{e_i,o} := U_{o,e_i} := U_{1/2}(e_i) \cap \bigcap_{j \neq i} U_o(e_j)$,
$U_{oo} := \bigcap_{i \in I} U_o(e_i)$.

$\mathcal{E}$ heiße vollständig, wenn $U_{oo} = 0$.

Die Summe P der Peirce-Räume bezüglich $\mathcal{E}$ ist direkt und

heiße die Peirce-Summe von $\mathcal{E}$.
Ist $\mathcal{E}$ endlich,so ist P = U. [Me,XV Th5]

(1.21) Es gelten die Multiplikationsregeln
$\{U_{ij}U_{jk}^{*}U_{kl}\} \subset U_{il}$ für alle $i,j,k,l \in I$.
Produkte,die nicht in diese Form gebracht werden können, verschwinden.

(1.22) Lemma Seien e,f,g Tripotente in U mit $e \top f \top g$ und $g \in U_{1/2}(e)$.Dann ist $e \top g$.
Beweis: Nach [Mc,1.1] gibt es einen Automorphismus A von U mit A(e) = f,A(f) = e und $A(g) = 4Q(e,f)^2 g - g$.Aber nach (1.13) ist $Q(e,f)g = 0$,daher $e \top g$. Qed

(1.23) Lemma Seien e,f Tripotente in U.
(1) Aus $f \in U_1(e)$ folgt $U_1(f) \subset U_1(e)$ und $U_0(e) \subset U_0(f)$.
(2) Aus $f \in U_1(e)$ und $e \in U_1(f)$ folgt $U_k(e) = U_k(f)$ für $k = 0,1/2,1$.
Beweis: (1) Es ist $U_1(f) = Q(f)U \subset U_1(e)$ nach (1.14) und (1.13)(2) und $(f \square f^{*})U_0(e) = 0$ nach (1.13)(1),also $U_0(e) \subset U_0(f)$.
(2) Aus (1) folgt $U_k(e) = U_k(f)$ für k = 0,1.Aus der Verträglichkeit von e und f (1.18) folgt dann auch $U_{1/2}(e) = U_{1/2}(f)$.
Qed

(1.24) Lemma Seien e und g Tripotente in U mit $U_1(g) \subset U_{1/2}(e)$. Dann ist $f := 2\{gg^{*}e\}$ eine e-Projektion mit $f \top g$.Insbesondere ist $f \neq 0$.
Beweis: Sei $G := g \square g^{*}$.Aus der Verträglichkeit von e und g folgt $p_1^g(e) \in U_1(e) \cap U_1(g)$.Aber es ist $U_1(g) \subset U_{1/2}(e)$,daher $p_1^g(e) = 0$ und $e \in U_{1/2}(g) + U_0(g)$,also $f = 2Ge \in U_{1/2}(g)$.
Aus (1.13) folgt $f \in U_1(e)$,also mit (1.7) $f = 2Ge = 2G\{ee^{*}e\}$
$= 4\{(Ge)e^{*}e\} - 2\{e(Ge)^{*}e\} = 2\{fe^{*}e\} - \{ef^{*}e\} = 2f - \{ef^{*}e\}$,
d.h. $f = \{ef^{*}e\}$.
Weiter folgt mit (1.7): $f = 2G\{ef^{*}e\} = 2\{ff^{*}e\} - \{ef^{*}e\}$,

d.h. $f = \{ff^*e\}$.
Schließlich ist $f = 2G\{ee^*f\} = \{fe^*f\} - \{ef^*f\} + \{ee^*f\}$
$= \{fe^*f\}$.Damit ist also f eine e-Projektion oder $f = 0$,
und e - f ist ein zu f orthogonales Tripotent.
Daher ist $\{ff^*g\} = \{ef^*g\} = 2\{e(Ge)^*g\} = 2(-\{ge^*(Ge)\}$
$+ \{\{ge^*g\}g^*e\} + G\{ge^*e\} = g - \{ff^*g\}$,wobei die dritte
Gleichheit durch Anwendung von (1.7) auf $\{ge^*\{gg^*e\}$ folgt
und die letzte aus $U_1(g) \subset U_{1/2}(e)$,was mit (1.13)(2)
$\{ge^*g\} = 0$ impliziert.Also ist $f \neq 0$ und $g \in U_{1/2}(f)$.
Aus $f \in U_1(e)$ folgt $U_1(f) \subset U_1(e)$,daher
$U_1(f) \cap U_1(g) = 0$.Weiter ist $Q(g)(U_o(f)) \subset U_1(f)$ nach (1.13)
und Q(g) ist Bijektion von $U_1(g)$ auf sich (1.15).Daher ist
$U_o(f) \cap U_1(g) = 0$.Weil f und g verträglich sind,folgt
$U_1(g) \subset U_{1/2}(f)$.
Aus $f \in U_{1/2}(g) \cap U_1(e)$,damit $Q(f)(U_o(g)) \subset U_1(e) \cap U_1(g) = 0$,
folgt $U_1(f) \cap U_o(g) = 0$ und aus $U_1(f) \subset U_1(e)$,$U_1(g) \subset U_{1/2}(e)$
folgt $U_1(f) \cap U_1(g) = 0$,daher $U_1(f) \subset U_{1/2}(g)$.
Damit ist $f \top g$. Qed

§ 2 JB*- Tripel

Wir betrachten jetzt Jordan -*- Tripel- Strukturen auf Banachräumen.

(2.1) Def [Ka 1] Ein Jordan -*- Tripel U mit vollständiger Norm heiße ein Hermitesches Jordan-Tripelsystem (HJTS), wenn das Tripelprodukt stetig ist und

(2.2) $z \square z^*$ hermitesch ist für alle $z \in U$.

(2.3) Die hermiteschen Operatoren auf einem Banachraum B bilden einen reellen Unterraum von $\mathcal{L}(B)$ [Bon, §5 Lemma4] . Ist daher $x \square y^* = y \square x^*$ für $x,y \in U$, so ist $x \square y^*$ hermitesch.

Jede C*- Algebra ist ein Hermitesches Jordan-Tripelsystem in dem Produkt

(2.4) $\{xy^*z\} := 1/2(xy^*z + zy^*x)$.

In [Ka 4,(5.3)] wird nun gezeigt:
Für ein Hermitesches Jordan-Tripelsystem sind äquivalent:

(2.5) $\sigma(z \square z^*) \geq 0$ und $\|z \square z^*\| = \|z\|^2$ für alle $z \in U$,

(2.6) $\sigma(z \square z^*) \geq 0$ und $\|\{zz^*z\}\| = \|z\|^3$ für alle $z \in U$,

(2.7) für jedes $z \in U$ gibt es einen isometrischen Isomorphismus von dem von z in U erzeugten abgeschlossenen Untertripel auf eine kommutative C*-Algebra, aufgefaßt als HJTS vermöge (2.4).

(2.8) Def [Ka 4] Ein Hermitesches Jordan-Tripelsystem heiße ein JB*-Tripel, wenn eine der äquivalenten Bedingungen (2.5) - (2.7) erfüllt ist.

Jede C*-Algebra wird also mit (2.4) zu einem JB*-Tripel.

(2.9) Ein abgeschlossenes Untertripel eines JB*-Tripels ist ein JB*-Tripel (wegen (2.7)).

(2.10) Ein abelsches JB*-Tripel ist isometrisch isomorph zu einem Untertripel einer kommutativen C*-Algebra. [Ka4,(1.11)]

Def Ein algebraischer Isomorphismus von Hermiteschen Jordan-Tripelsystemen ist ein Isomorphismus der unterliegenden Jordan -$*$- Tripel.

(2.11) Satz Die algebraischen Isomorphismen von JB*-Tripeln sind genau die surjektiven Isometrien.
Beweis: Sei $f:U_1 \to U_2$ ein algebraischer Isomorphismus von JB*-Tripeln. Für alle $z \in U$ ist dann $\sigma(z \square z^*) = \sigma(f(z) \square f(z)^*)$ und $\|z\|^2 = \|z \square z^*\| = \sup \sigma(z \square z^*) = \sup \sigma(f(z) \square f(z)^*)$ $= \|f(z) \square f(z)^*\| = \|f(z)\|^2$, denn für hermitesche Operatoren stimmen Norm und Spektralradius überein [Si,Prop2].
Die Umkehrung folgt aus [Ka4,(5.5)]. Qed

JB*-Tripel sind eine Verallgemeinerung der von Kaplansky eingeführten JB*-Algebren:
(2.12) Def [W] Eine Jordan -$*$- Algebra U mit vollständiger Norm heiße eine JB*-Algebra, wenn für alle $z,w \in U$ gilt:
(2.13) $\|zw\| \leq \|z\| \|w\|$ und
(2.14) $\|\{zz^*z\}\| = \|z\|^3$,
wobei $\{...\}$ das Tripelprodukt aus (1.11) bezeichnet.
Die bei [W] zusätzlich angegebenen Bedingungen - Isometrie der Involution und lokale Äquivalenz zu C*-Algebren - folgen aus [Y2, Lemma 4] und [W, S.292].

Beispiele für JB*-Algebren sind C*-Algebren, versehen mit dem Jordan-Produkt $x \circ y := 1/2(xy + yx)$, sowie bezüglich des Jordan-Produkts abgeschlossene, norm-abgeschlossene, $*$-invariante Unterräume dieser Algebren.
Ein weiteres Beispiel ist der Jordan-Ausnahme-Faktor (siehe (6.5)), der nicht in eine C*-Algebra, versehen mit dem Jordan-Produkt, eingebettet werden kann.
In [A2] wird gezeigt, daß dies "im wesentlichen" alle Beispiele

sind.

(2.15) Satz Jede JB^*-Algebra ist ein JB^*-Tripel in dem Produkt (1.11).
Beweis: Die Behauptung folgt aus [Br3,Th 3.3] und [Y1].

Zusammen mit (2.9) erhält man somit eine große Klasse von Beispielen für JB^*-Tripel.Es ist bislang nicht bekannt,ob es weitere gibt (vgl.[Ka4,(5.10)]).

Die reellen Analoga zu JB^*-Algebren sind die in [A2] eingeführten JB-Algebren:

(2.16) Def [W] Eine reelle Jordan-Algebra A mit Eins und vollständiger Norm heiße eine JB-Algebra,wenn gilt:
(2.17) $\|xy\| \leq \|x\| \, \|y\|$ für alle $x,y \in A$,
(2.18) für jedes $x \in A$ ist die von x und der Eins erzeugte norm-abgeschlossene Unteralgebra isometrisch isomorph zum selbstadjungierten Teil einer kommutativen C^*-Algebra.

Der selbstadjungierte Teil einer unitalen JB^*-Algebra ist eine JB-Algebra.Umgekehrt gibt es auf der Komplexifizierung einer JB-Algebra eine eindeutig bestimmte Norm,die diese zu einer JB^*-Algebra macht [W].
Dies kann man benützen zum Beweis der folgenden Umkehrung von (2.15):

(2.19) Satz Ist e ein Tripotent in dem JB^*-Tripel U,so ist $U_1(e)$ mit Produkt und Involution aus (1.15) in der induzierten Norm eine JB^*-Algebra mit Eins e.

(Der Beweis des Satzes ist schon in [Br3,(2.2)] zusammen mit [Ka4,S.523] und [Ka6,(3.7)] enthalten.Es sei hier jedoch noch ein kurzer funktionalanalytischer Beweis angegeben:)

Beweis: Aus (1.11) folgt für alle $z = z^* \in U_1(e)$, daß $z \square e^*|_{U_1(e)} = e \square z^*|_{U_1(e)}$ ist. Daher ist $z \square e^*|_{U_1(e)}$ hermitesch (2.3), also ist $\|z \square e^*|_{U_1(e)}\| = \sup|\sigma(z \square e^*|_{U_1(e)})|$ [Si, Prop 2]. Der kleinste abgeschlossene Unterraum A von $U_1(e)$, der e enthält und invariant ist unter $z \square e^*$ - das ist die von e und z in $U_1(e)$ erzeugte (assoziative und kommutative) abgeschlossene Unteralgebra, ist ein abgeschlossenes abelsches Untertripel von U. Mit Hilfe von (2.10) folgt, daß A (als Algebra) isometrisch $*$-isomorph ist zu einer kommutativen C^*-Algebra mit Eins.
Daher ist $\|z\| = \sup|\sigma(z \square e^*|_A)|$ und mit [Ka4, (3.3)] folgt $\|z\| = \sup|\sigma(z \square e^*|_{U_1(e)})| = \|z \square e^*|_{U_1(e)}\|$, d.h. für alle $w \in U_1(e)$ ist $\|zw\| = \|(z \square e^*)w\| \leq \|z\| \|w\|$.
Insbesondere ist daher der selbstadjungierte Teil von $U_1(e)$ eine JB-Algebra. Auf $U_1(e)$ gibt es somit eine Norm, mit der $U_1(e)$ zu einer JB^*-Algebra wird. Mit dieser Norm ist $U_1(e)$ ebenfalls ein JB^*-Tripel (2.15). Wegen (2.11) stimmt sie daher mit der induzierten Norm überein. Qed

Weitere Beispiele für JB^*-Tripel erhält man aus dem folgenden

(2.20) Lemma (vgl. [Ka4, S.523]) Ist $(U_i)_{i \in I}$ eine Familie von JB^*-Tripeln, so ist auch $U := \oplus^\infty_{i \in I} U_i$ mit den komponentenweise erklärten Verknüpfungen ein JB^*-Tripel.

Beweis: Unmittelbares Nachprüfen zeigt, daß U ein Hermitesches Jordan-Tripelsystem ist.
Sei nun $z = (z_i)_{i \in I} \in U$, sei A das von z in U erzeugte abgeschlossene Untertripel, sei A_i ($i \in I$) das von z_i in U_i erzeugte abgeschlossene Untertripel. Nach (2.7) ist A_i isometrisch isomorph zu einer kommutativen C^*-Algebra B_i. A ist daher isometrisch isomorph zu einem Untertripel der C^*-Algebra $B := \oplus^\infty_{i \in I} B_i$. Nach (2.7) für B ist A isometrisch isomorph zu einer kommutativen C^*-Algebra. Dies beweist (2.7) für U. Qed

In den folgenden Sätzen spielen Tripotente eine Rolle.In einem JB^*-Tripel braucht es keine Tripotente zu geben,wie das Beispiel des Raums $\mathcal{C}_o(X)$ der im Unendlichen verschwindenden Funktionen auf einem zusammenhängenden,lokalkompakten,nicht kompakten topologischen Raum X zeigt.(vgl.jedoch § 3)

(2.21) Lemma Sei f ein Tripotent in einem Hermiteschen Jordan-Tripelsystem U.Dann sind die natürlichen Projektionen auf die Peirce-Räume von f kontraktiv.Ist f vollständig, sind sie sogar hermitesch.

Beweis: $f \square f^*$ ist hermitesch (2.2).Daher ist für alle $x = \sum_{k\in I} x_k$ $(I = \{0,1/2,1\}, x_k \in U_k(f))$ und für alle $t \in \mathbb{R}$: $\|(\exp it(f \square f^*))x\| = \|\sum_{k\in I} e^{ikt} x_k\| = \|x\|$.Durch geeignete Wahl von t folgt $\|x_k\| \leq \|x\|$ für $k \in I$.
Ist f vollständig,so erhält man $\|e^{it}x_1 + x_{1/2}\| = \|x\|$ für alle $t \in \mathbb{R}$,d.h. die Peirce-Projektionen sind hermitesch. Qed

Bemerkung: Ist f nicht vollständig,so sind die Peirce-Projektionen im allgemeinen nicht hermitesch,wie folgendes Beispiel zeigt:
Sei $\mathbb{C}^2$ mit der euklidischen Norm versehen,sei $U := \mathcal{L}(\mathbb{C}^2)$, $f := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $x := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, p die natürliche Projektion auf $U_1(f) = \begin{pmatrix} 0 & * \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.Dann ist $(\exp i\pi p)x = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} =: y$,aber $\|x\| = 2, \|y\| = \sqrt{2}$. Qed

(2.22) Satz Die vollständigen Tripotente eines JB^*-Tripels U stimmen mit den reellen und mit den komplexen Extremalpunktender abgeschlossenen Einheitskugel U^1 von U überein.

Beweis: Die offene Einheitskugel von U ist ein beschränktes symmetrisches Gebiet,dessen zugehöriges Hermitesches Jordan-Tripelsystem gerade wieder U ist [Ka4,§4]. [Ka5,(3.5)] zeigt daher,daß die vollständigen Tripotente von U gerade die kom-

plexen Extremalpunkte von U^1 sind.
Sei nun $f \in U$ ein vollständiges Tripotent, sei $x \in U$ und $f + sx \in U^1$ für alle $s \in [-1,1]$, sei $x = x_1 + x_{1/2}$ mit $x_k \in U_k(e)$ $(k = 1, 1/2)$. Nach (2.21) ist $f+sx_1 \in U^1$ und $f+sx_1+e^{it}sx_{1/2} \in U^1$ für alle $t \in \mathbb{R}$. Nach [Br3,(4.1)] ist f reeller Extremalpunkt der abgeschlossenen Einheitskugel der JB^*-Algebra $U_1(e)$, daher ist $x_1 = 0$ und somit auch $x_{1/2} = 0$. Qed

Das folgende Lemma charakterisiert Linearformen, die ihr Betragsmaximum auf der abgeschlossenen Einheitskugel annehmen:
(2.23) Lemma Sei U ein JB^*-Tripel, sei $w \in U$, $\|w\| = 1$, sei $f \in U^*$, $\|f\| = f(w)$, sei e ein Tripotent in U mit $w \in U_1(e)$.
Dann ist $U_{1/2}(e) + U_0(e) \subset \operatorname{Ker} f$.

Beweis: Die offene Einheitskugel D von U ist ein beschränktes symmetrisches Gebiet mit zugehörigem Hermiteschen Jordan-Tripelsystem U [Ka4,§4]. Sei $\mathfrak{g}$ die Lie-Algebra der vollständigen holomorphen Vektorfelder auf D. Die Elemente von $\mathfrak{g}$ sind polynomiale Vektorfelder [Ka1,§2], also auf ganz U definiert. Für $X = f\frac{\partial}{\partial z} \in \mathfrak{g}$ sei $X_w := f(w)$. Sei $W := \{X_w \mid X \in \mathfrak{g}\}$.
Für $v \in U$ ist $V := (v - \{zv^*z\})\frac{\partial}{\partial z} \in \mathfrak{g}$ [Ka1,§2].
Für $v \in U_{1/2}(e) + U_0(e)$ ist daher nach (1.13) $V_w = v - \{wv^*w\}$ $= v$, also $U_{1/2}(e) + U_0(e) \subset W$.
Zu $X \in \mathfrak{g}$ sei γ_X die (in einer Nullumgebung in $\mathbb{R}$ definierte) Integralkurve mit Anfangswert $\gamma_X(0) = w$. Weil X auf D vollständig ist, verläuft γ_X im Rand von D.
Somit folgt $\operatorname{Re} f(\gamma_X(t)) \leq \|f\|$ für alle t aus dem Definitionsbereich von γ_X und $f(\gamma_X(0)) = \|f\|$, woraus $\operatorname{Re} f(\gamma_X'(0)) = 0$ folgt. Aber $\gamma_X'(0) = X_w$, also $\operatorname{Re} f(W) = 0$. Weil $U_{1/2}(e) + U_0(e)$ $\mathbb{C}$-linearer Unterraum ist, folgt $f(U_{1/2}(e) + U_0(e)) = 0$. Qed

Zur Existenz eines Tripotents e mit $w \in U_1(e)$ vergleiche (3.14).

§ 3 JBW*- Tripel - Charakterisierungen des Präduals

Wie schon in §2 erwähnt,braucht ein JB*-Tripel keine Tripotente zu besitzen.Ist das JB*-Tripel jedoch ein dualer Banachraum,so gibt es nach dem Satz von Krein-Milman und (2.22) "viele" Tripotente.

Wir definieren wie üblich:
(3.1) Def (i) Sei E ein Banachraum.Ein abgeschlossener Teilraum $F \subset E^*$ heiße Prädual von E (bezüglich der kanonischen Dualität von E und F),wenn die Abbildung $E \to F^* : e \mapsto [f \mapsto \langle f,e \rangle]$ eine surjektive Isometrie ist.
(ii) E besitze einen eindeutigen Prädual F,wenn es genau einen abgeschlossenen Teilraum $F \subset E^*$ gibt,der Prädual bezüglich der kanonischen Dualität ist.

Man beachte jedoch,daß es in der Literatur noch einen anderen (schwächeren) Eindeutigkeitsbegriff für Präduale gibt (vergleiche z.B.[G]).

Man erhält sofort das bekannte
(3.2) Lemma Ist F_i eindeutiger Prädual von E_i (i=1,2),so ist jede surjektive Isometrie j von E_1 auf E_2 $\sigma(E_1,F_1) - \sigma(E_2,F_2)$ - stetig.

Beweis: Das Bild ${}^t j(F_2)$ von F_2 unter der Adjungierten ${}^t j$ von j ist ein Prädual von E_1 (bezüglich der kanonischen Dualität),also ist $F_1 = {}^t j(F_2)$,woraus die Behauptung folgt. Qed

(3.3) Def Ein JB*-Tripel U heiße ein JBW*-Tripel,wenn gilt:
U besitzt (als Banachraum) einen Prädual U_*,so daß
(3.4) das Tripelprodukt in jeder Komponente stetig bezüglich $\sigma(U,U_*)$ ist.

$\sigma(U,U_*)$ werde auch mit σ^* bezeichnet.

In (3.20) wird gezeigt,daß der Prädual (im Sinne von (3.1)) eindeutig ist.

(3.5) Lemma Ist e ein Tripotent in U,so sind die Peirce-Projektionen von e σ^*-stetig.

Beweis: Die Peirce-Projektionen sind Polynome in $e \square e^*$ (1.14).Damit folgt (3.5) aus (3.4). Qed

(3.6) Lemma Ein σ^*-abgeschlossenes Untertripel V eines JBW*-Tripels U ist ein JBW*-Tripel mit Prädual U_*/V° (bezüglich der kanonischen Dualität von V und U_*/V°).
Die von $\sigma(U,U_*)$ auf V induzierte Topologie ist $\sigma(V,U_*/V^\circ)$.
(Dabei bezeichne V° die Polare von V.)

Beweis: [Kö,§22,3b)] und [Sch,IV4.1Cor1]. Qed

Beispiele für JBW*-Tripel erhält man aus
(3.7) Def ([E],[Sh]) Eine JB*-Algebra (JB -Algebra) heiße eine JBW*-Algebra (JBW-Algebra),wenn sie (als Banachraum) einen Prädual besitzt.

(3.8) Die JBW-Algebren sind genau die selbstadjungierten Teile der JBW*-Algebren.[E,Th3.6 und Th3.9]

(3.9) JBW-Algebren und JBW*-Algebren besitzen eindeutigen Prädual.([Sh,Th2.3] und [E,Cor3.7])

(3.10) Für ein Tripotent e in einem JBW*-Tripel U ist $U_1(e)$ eine JBW*-Algebra (vermöge (2.19)),was aus (3.5) und (3.6) folgt.
Der Prädual von $U_1(e)$ werde mit $U_1(e)_*$ bezeichnet.

(3.11) Lemma Jede JBW*-Algebra ist ein JBW*-Tripel vermöge (2.15).

Beweis: (3.4) folgt mit (3.8) aus [Sh,Lemma2.2] und [E,Cor3.3]. Qed

Wie bei W^*-Algebren (vgl. [Sa,1.1.5]) erhält man auch für JBW^*-Tripel:

(3.12) Lemma Ist$(U_i)_{i\in I}$ eine Familie von JBW^*-Tripeln,so ist $U:= \oplus^{\infty}_{i\in I} U_i$ ein JBW^*-Tripel mit den komponentenweise erklärten Verknüpfungen.

Beweis: U ist ein JB^*-Tripel (2.20).Seien $(U_i)_*$ Präduale von $U_i (i\in I)$,sei $U_* := \oplus^{1}_{i\in I} (U_i)_*$.Vermöge $\langle (f_i)_{i\in I},(x_i)_{i\in I}\rangle := \sum_{i\in I} f_i,x_i$ - wobei $(f_i)_{i\in I}\in U_*$,$(x_i)_{i\in I}\in U$ - ist dann U_* ein Prädual von U.
Ist für alle $i\in I$ T_i ein beschränkter linearer (antilinearer) Operator auf U_i und ist $\sup\{\|T_i\| \mid i\in I\} < \infty$,so wird durch $T(x_i)_{i\in I} := (T_i x_i)_{i\in I}$ ein beschränkter linearer (antilinearer) Operator auf U definiert.T ist $\sigma(U,U_*)$ - stetig genau dann,wenn für alle $i\in I$ T_i $\sigma(U_i,(U_i)_*)$ - stetig ist. Daraus folgt (3.4) für U. Qed

Bezüglich der lokalen Eigenschaften eines JBW^*-Tripels erhält man folgende Verbesserung von (2.10):

(3.13) Lemma Ein abelsches, σ^*-abgeschlossenes Untertripel W eines JBW^*-Tripels U ist isometrisch isomorph zu einer kommutativen W^*-Algebra (mit dem Produkt (2.4)).
Insbesondere ist die Menge der Tripotente norm-total in U.

Beweis: W besitzt einen Prädual (3.6).Nach dem Satz von Krein-Milman und (2.22) enthält W ein in W vollständiges Tripotent e.Weil W abelsch ist,ist $\{ee^*\{ee^*z\}\} = \{\{ee^*e\}e^*z\}$ $=\{ee^*z\}$ für alle $z\in W$,d.h. $e\,\square\, e^*\,|_W = (e\,\square\, e^*\,|_W)^2$,daher $W\cap U_{1/2}(e) = 0$.Im Sinne von (2.19) ist also W eine assozia-

tive, σ^*-abgeschlossene $*$-Unteralgebra der JBW*-Algebra $U_1(e)$. W ist daher eine kommutative W*-Algebra mit Eins e.

Ein von einem Element erzeugtes σ^*-abgeschlossenes Untertripel ist abelsch wegen (3.4). In W*-Algebren ist die Menge der Projektionen norm-total [Sa,1.11.3]. Daraus folgt der Rest der Behauptung. Qed

(3.14) Lemma Sei U ein JBW*-Tripel.
(1) Zu jedem $z \in U$ gibt es ein vollständiges Tripotent e mit $z \in U_1(e)$ und $z = \{ez^*e\}$.
(2) Zu jeder orthogonalen Familie $(f_j)_{j\in J}$ von Tripotenten in U gibt es ein vollständiges Tripotent f in U, so daß für alle $j \in J$ f_j eine f-Projektion ist.

Beweis: Die Beweise von (1) und (2) verlaufen weitgehend parallel.
Das von z (bzw. $\{f_j \mid j \in J\}$) in U erzeugte Untertripel V_z (bzw. V) ist abelsch. Nach Zorn gibt es ein bezüglich der Inklusion maximales abelsches Untertripel W_z (bzw. W), das V_z (bzw. V) enthält. Wegen (3.4) ist W_z (bzw. W) σ^*-abgeschlossen.
Für das weitere kann man wegen (3.13) annehmen, daß W_z (bzw. W) eine kommutative W*-Algebra ist. Die σ^*-Topologien dieser W*-Algebren stimmen wegen (3.6) und der Eindeutigkeit des Präduals einer W*-Algebra mit den von $\sigma(U,U_*)$ induzierten Topologien überein.
Sei $z = u|z|$ die polare Zerlegung von z in der W*-Algebra W_z [Sa,1.12.1]. Dann ist $e := 1_{W_z} - uu^* + u$ ein in W_z unitäres Tripotent mit $z = \{ez^*e\}$, wie man unmittelbar nachrechnet.

Sei $f := 1_W - \sum_{j\in J} f_j f_j^* + \sum_{j\in J} f_j$. Die Summen existieren in der σ^*-Topologie: $(f_j f_j^*)_{j\in J}$ ist eine orthogonale Familie von Projektionen, daher summierbar. Ferner gibt es für alle $j \in J$ eine (eindeutige) Zerlegung $f_j = f_{j1} - f_{j2} + if_{j3} - if_{j4}$, so daß $f_{j1} f_{j2} = 0 = f_{j3} f_{j4}$ und für $k = 1,\ldots,4$ f_{jk} positiv ist.

Für $i \neq j$ ist $f_{ik}f_{jk} = 0$, was in einer Darstellung von W als Raum stetiger Funktionen auf einem hyperstoneschen Raum sofort einsichtig ist, und es ist $\|f_{jk}\| \leq \|f_j\| = 1$ $(k=1,\ldots,4)$. Das Netz der endlichen Summen von $(f_{jk})_{j\in J}$ ist also monoton wachsend und beschränkt, konvergiert daher gegen $\sum_{j\in J} f_{jk} = \sup\{\sum_{j\in F} f_{jk} \mid F \subset J\}$ bezüglich σ^* (siehe z.B. [Sa, 1.7.4]). Also existiert auch $\sum_{j\in J} f_j$ bezüglich σ^*.

Mit Hilfe der partiellen σ^*-Stetigkeit des Tripelprodukts rechnet man nach, daß f in W unitär ist und für alle $i \in I$ f_i eine f-Projektion ist.

e und f sind in U vollständige Tripotente: Gäbe es ein $0 \neq x_z \in U_0(e)$ (bzw. ein $0 \neq x \in U_0(f)$), so wäre das von x_z (bzw. x) erzeugte Untertripel T_z (bzw. T) abelsch, und es gälte $T_z \subset U_0(e)$ (bzw. $T \subset U_0(f)$). Wegen (1.13)(1) und (1.7) wäre dann auch $T_z \oplus W_z$ (bzw. $T \oplus W$) ein abelsches Untertripel im Widerspruch zur Maximalität von W_z (bzw. W). Qed

(3.15) Korollar Jede orthogonale Familie $\tilde{\mathcal{F}} := (f_j)_{j\in J}$ von Tripotenten in einem JBW*-Tripel U ist summierbar in der σ^*-Topologie. $\tilde{f} := \sum_{j\in J} f_j$ ist ein Tripotent, und für alle $j \in J$ ist f_j eine $\tilde{f}$-Projektion.

$\tilde{\mathcal{F}}$ ist eine vollständige orthogonale Familie genau dann, wenn $\tilde{f}$ ein vollständiges Tripotent ist.

Beweis: Nach (3.14) gibt es ein Tripotent f in U, so daß $\tilde{\mathcal{F}}$ eine orthogonale Familie von Projektionen in der JBW*-Algebra $U_1(f)$ ist. Daher ist $\tilde{\mathcal{F}}$ summierbar bezüglich σ^*. Die beiden nächsten Behauptungen rechnet man mit Hilfe der partiellen σ^*-Stetigkeit des Tripelprodukts (3.4) unmittelbar nach.

Sei schließlich $\tilde{f}$ vollständig, sei $z \in U_{00}$. (Für die Bezeichnungen siehe (1.20), (1.14).) Dann ist $\{\tilde{f}\tilde{f}^*z\} = \sum_{j\in J} \{f_j f_j^* z\} = 0$, also $z = 0$.

Sei $p_k^j := p_k^{f_j}$ für $j \in J, k = 0, 1/2, 1$. Ist umgekehrt $\tilde{\mathcal{F}}$ vollständig, $0 \neq z \in U$, so gibt es ein $j \in J$ mit

$(p_1^j + p_{1/2}^j)(z) \neq 0$. Ist $p_1^j(z) \neq 0$, so auch $p_1^{\tilde{f}}(z) \neq 0$ wegen $U_1(f_j) \subset U_1(\tilde{f})$ (1.23) und der Verträglichkeit von f_j und $\tilde{f}$. Andernfalls ist $v := p_{1/2}^j(z) \neq 0$. Dann ist $p_1^i(v) = 0$ für $i \in J$, $i \neq j$, weil $f_i \perp f_j$ und damit $U_1(f_i) \subset U_0(f_j)$ ist. Gibt es nun ein $i \in J$ mit $p_{1/2}^i(v) =: w \neq 0$, dann ist $w \in U_{ij} \subset U_1(\tilde{f})$, also wegen der Verträglichkeit von f_i, f_j und $\tilde{f}$ $p_1^{\tilde{f}}(z) \neq 0$. Gibt es kein solches $i \in J$, folgt also $v \in U_{jo}$ und $\{\tilde{f}\tilde{f}^*v\} = \sum_{i \in J} \{f_i f_i^* v\}$ $= 1/2\, v$ und daraus $p_{1/2}^{\tilde{f}}(z) \neq 0$. Damit ist $\tilde{f}$ vollständig. Qed

(3.16) Def Sei U ein Banachraum. $p \in \mathfrak{L}(U)$ heiße eine Projektion auf U, wenn $p^2 = p$ ist.
Zwei Projektionen p und q auf U heißen orthogonal, wenn $pq = qp = 0$ ist.

(3.17) Lemma Sei U ein JBW*-Tripel, $\mathfrak{F} := (f_j)_{j \in J}$ eine orthogonale Familie von Tripotenten in U. Dann ist die Peirce-Summe bezüglich $\mathfrak{F}$ (1.20) σ^*-dicht in U.
Genauer gilt: Es gibt auf U eindeutige σ^*-stetige, paarweise orthogonale Projektionen p_{ij} auf die Peirce-Räume U_{ij} $(i,j \in J \cup \{0\})$, gegeben durch:

$$p_{kk} = p_1^{f_k} = Q(f_k)^2, \qquad \text{wobei } k,l \in J, k \neq l$$

$$p_{kl} = p_{1/2}^{f_k} p_{1/2}^{f_l} = 4Q(f_k, f_l)^2, \qquad \text{und } f := \sum_{j \in J} f_j ,$$

$$p_{ko} = p_{1/2}^{f} p_{1/2}^{f_k} ,$$

$$p_{oo} = p_o^f .$$

Jedes $z \in U$ liegt in dem von $\{p_{ij}(z) \mid i,j \in J \cup \{0\}\}$ aufgespannten σ^*-abgeschlossenen Unterraum.

Beweis: f existiert nach (3.15). Wegen der Verträglichkeit von $\{f\} \cup \mathfrak{F}$ (1.18) sind die angegebenen Abbildungen p_{ij} $(i,j \in J \cup \{0\})$ in der Tat - wegen (3.5) σ^*-stetige - Projektionen auf U.
Offenbar ist $p_{kl}(U) = U_{kl}$ für $k,l \in J$.

$\underline{P_{lo}(U) \subset U_{lo}}$: Es ist $U_{kl} \subset U_1(f_k+f_l) \subset U_o(f_j)$ für $j \in J, k \neq l \neq j \neq k$, also $U_{kl} \subset U_1(f)$ und damit $P^k_{1/2} P_{lo} = P_{kl} P^f_{1/2} = 0$. Wegen $U_{kk} \subset U_1(f)$ ist auch $P^k_1 P_{lo} = 0$, also $P^k_o P_{lo} = P_{lo}$, d.h. $P_{lo}(U) \subset U_{lo}$.

$\underline{U_{lo} \subset P_{lo}(U)}$: Für $z \in U_{lo}$ ist $\{ff^*z\} = \{f_l f_l^* z\} = 1/2\, z$.

$\underline{P_o(U) \subset U_{oo}}$: Sei $k,l \in J, k \neq l$. Dann ist $P^k_1 P_o = 0$ wegen $U_1(f_j) \subset U_1(f)$, damit auch $P^k_1 P^l_{1/2} P_o = 0$, und $P^k_{1/2} P^l_{1/2} P_o = P_{kl} P_o = 0$ wegen $U_{kl} \subset U_1(f)$, also $P^l_{1/2} P_o = P^k_o P^l_{1/2} P_o$ für alle $k \neq l$, d.h. $P^l_{1/2} P_o(U) \subset U_{lo} \cap U_o(f) = 0$. Damit ist $P^l_o P_o = P_o$ für alle $l \in J$.

$\underline{U_{oo} \subset P_o(U)}$: Es ist $\{ff^*z\} = \sum_{j \in J} \{f_j f_j^* z\} = 0$.

Die paarweise Orthogonalität der Projektionen folgt aus der Verträglichkeit von $\{f\} \cup \mathfrak{F}$ und der Direktheit der Peirce-Summe.

Für den Rest der Behauptung sei oBdA $z \in U_m(f)$ für ein $m \in \{0, 1/2, 1\}$.

$\underline{m = 1}$: Mit (1.13) folgt $Q(f_i, f_j) U \subset U_{ij}$ $(i,j \in J)$, also mit (1.21) $Q(f_k, f_l) Q(f_i, f_j) = 0$ für $\{k,l\} \neq \{i,j\}$ und daraus $z = Q(f)^2 z = \sum_{i \in J} \sum_{j \in J} c_{ij} Q(f_i, f_j)^2 z$ mit $c_{ij} = 1$ für $i = j$ und $c_{ij} = 2$ für $i \neq j$ (Konvergenz bezüglich σ^*). Die Anwendung von P_{ij} liefert $P_{ij}(z) = c_{ij}^2 Q(f_i, f_j)^2 z$.

$\underline{m = 1/2}$: Wegen der Verträglichkeit von f und f_j $(j \in J)$ ist $P^{f_j}_1(z) \in U_1(f_j) \cap U_{1/2}(f) = 0$, daher $\{f_j f_j^* z\} \in U_{1/2}(f_j) \cap U_{1/2}(f) = P_{jo}(U) = U_{jo}$. Es gilt daher $z = 2\{ff^*z\} = 2 \sum_{j \in J} \{f_j f_j^* z\} = 2 \sum_{j \in J} P_{jo}(z)$ (Konvergenz bezüglich σ^*).

$\underline{m = 0}$: Hier ist nichts mehr zu zeigen.

Die Eindeutigkeit der angegebenen Projektionen folgt aus der σ^*-Dichtheit der Peirce-Summe. Qed

Sei nun im folgenden immer U ein JBW*-Tripel mit einem Prädual U_*, für den (3.4) gilt.

(3.18) Lemma Sei e ein Tripotent in U, $f \in U_*$.
Dann ist $f|_{U_1(e)} \in U_1(e)_*$.

Beweis: Dies folgt aus (3.6) und der Eindeutigkeit des Prädualsvon $U_1(e)$. Qed

Es gilt auch die Umkehrung:

(3.19) Satz Sei $f \in U^*$, für alle vollständigen Tripotente e in U sei $f|_{U_1(e)} \in U_1(e)_*$. Dann ist $f \in U_*$.

Beweis: Sei U^1 die abgeschlossene Einheitskugel von U. Nach dem Satz von Krein-Šmulyan genügt es zu zeigen, daß f auf U^1 stetig ist bezüglich der induzierten σ^*-Topologie, denn eine Linearform auf einem topologischen Vektorraum ist stetig genau dann, wenn ihr Kern abgeschlossen ist [Sch, III 1.3].
Sei nun $(z_i)_{i\in I}$ ein σ^*-konvergentes Netz in U^1 mit $\lim(z_i)_{i\in I} =: z_o$. Sei $A := \{g \in U^* \mid \exists x \in U^1 : \|g\| = g(x)\}$.
Nach [Bi] ist A norm-dicht in U^*.
Sei $\varepsilon > 0$. Wähle $g \in A, x \in U^1$ und ein vollständiges Tripotent e in U mit $\|f-g\| < \varepsilon/4$, $\|g\| = g(x)$ und $x \in U_1(e)$ (nach (3.14)).
Für $i \in I \cup \{0\}$ sei $z_i = z_i^1 + z_i^{1/2}$ mit $z_i^k \in U_k(e)$ $(k = 1, 1/2)$.
Wegen (3.5) und der Voraussetzung an f gibt es dann ein $i_o \in I$, so daß für alle $i \succ i_o$ gilt: $|f(z_o^1 - z_i^1)| < \varepsilon/2$. Ferner ist $\|z_o^{1/2} - z_i^{1/2}\| \leq 2$ für alle $i \in I$ (2.21). Nach (2.23) ist $g(U_{1/2}(e)) = 0$. Daher ist $|f(z_o^{1/2} - z_i^{1/2})| < \varepsilon/2$ für alle $i \in I$.
Daraus folgt $|f(z_o - z_i)| < \varepsilon$ für alle $i \succ i_o$. Qed

Warnung: Aus (3.18) und (3.19) folgt nicht schon die Eindeutigkeit des Prädualds U_* (im Sinne von (3.1)), sondern nur, daß es höchstens einen Prädual U_* gibt, so daß das Tripelprodukt partiell $\sigma(U, U_*)$-stetig ist.

Mit (3.19) kann man nun ein aus dem assoziativen Fall [Ta,III 3.11] bekanntes Resultat verallgemeinern, welches zunächst für JBW*-Algebren formuliert sei:

(3.20) Satz Sei A eine JBW*-Algebra, sei $f \in A^*$. Dann sind äquivalent:
(1) $f \in A_*$,
(2) für jede orthogonale Familie von Projektionen $(e_i)_{i \in I}$ gilt $f(\sum_{i \in I} e_i) = \sum_{i \in I} f(e_i)$.

Beweis: Nach [E,3.7] und [H,4.4.15] gibt es eine zentrale Projektion $e \in A^{**}$ mit $(A_*)^\circ = (1-e)A^{**}$. Definiert man nun für $g \in A^*$ den normalen Teil von g durch $g_n := eg$ (wobei $eg(z) := g(ze)$ für $z \in A$) und den singulären Teil von g durch $g_s := (1-e)g$, so übertragen sich die Beweise von [Ta,III Th3.8 und Cor3.11] wörtlich. Qed

(3.21) Satz Für $f \in U^*$ sind äquivalent:
(1) $f \in U_*$,
(2) für jede orthogonale Familie von Tripotenten $(e_i)_{i \in I}$ gilt $f(\sum_{i \in I} e_i) = \sum_{i \in I} f(e_i)$.

Beweis: Sei $e := \sum_{i \in I} e_i$. Nach (3.15) ist e_i eine e-Projektion für alle $i \in I$. (2) folgt daher aus (1) mit (3.18) und (3.20).
Umgekehrt genügt es nach (3.19) zu zeigen, daß für alle Tripotente g in U $f|_{U_1(g)} \in U_1(g)_*$ ist. Damit folgt (1) aus (2) mit (3.20). Qed

(3.22) Satz Der Prädual eines JBW*-Tripels U ist eindeutig (im Sinne von (3.1)).

Beweis: Der Beweis stützt sich auf [G], auf das sich auch die Terminologie bezieht.
Nach (3.21) gibt es zu jedem $f \in U^* \setminus U_*$ eine orthogonale Familie $(e_i)_{i \in I}$ von Tripotenten mit $\sum_{i \in I} e_i =: e$ und $\sum_{i \in I} f(e_i) \neq f(e)$.

Sei W der von $\{e, e_i \mid i \in I\}$ aufgespannte, norm-abgeschlossene Teilraum von U. W enthält keinen zu $\ell^1(\mathbb{N})$ isomorphen Teilraum: Wegen der Separabilität von $\ell^1(\mathbb{N})$ wäre dieser in einem von e und abzählbar vielen e_i aufgespannten, abgeschlossenen Teilraum W' enthalten. Aus (3.15) folgt, daß $(e_i)_{i \in I}$ eine orthogonale Familie von Projektionen in der JBW*-Algebra $U_1(e)$ ist. Damit erhält man, daß W (isometrisch) isomorph zu einer kommutativen C*-Algebra mit Eins e ist, und daraus, daß W' isomorph zu $c(\mathbb{N})$ ist. Aber $c(\mathbb{N})$ ist isomorph zu $c_o(\mathbb{N})$, das nach [Li, ThI2.7] keinen zu $\ell^1(\mathbb{N})$ isomorphen Teilraum enthält. Also enthält auch W' und damit W keinen zu $\ell^1(\mathbb{N})$ isomorphen Teilraum.
Beachtet man nun, daß damit der Beweis von [G, Prop 3] in der Tat sogar zeigt, daß die abgeschlossene Einheitskugel von W "$*$-admissible" (Def 13) ist, folgt mit Prop17, daß U "bien encadré" (Def 14) ist. Aus Th 15 folgt dann die Eindeutigkeit von U im Sinne von [G, Einleitung] und die $\sigma(U, U_*)$-$\sigma(U, U_*)$-Stetigkeit jeder surjektiven Isometrie von U, woraus die Eindeutigkeit von U_* im Sinne von (3.1) folgt. Qed

(3.23) Korollar Jeder Isomorphismus von JBW*-Tripeln ist σ^*-stetig.

Beweis: Nach (2.11) ist jeder Isomorphismus von JB*-Tripeln isometrisch. Die Eindeutigkeit des Präduals (3.22) liefert dann mit (3.2) die Behauptung. Qed

Zusammenfassend erhält man folgende Charakterisierung des Präduals:

(3.24) Satz Sei U ein JBW*-Tripel mit Prädual U_*, sei $f \in U^*$. Dann sind äquivalent:
(1) $f \in U_*$,
(2) es gibt ein vollständiges Tripotent e in U mit

$f|_{U_1(e)} \in U_1(e)_*$ und $f(U_{1/2}(e)) = 0$,
(3) für alle vollständigen Tripotente e in U ist
$f|_{U_1(e)} \in U_1(e)_*$,
(4) für jede orthogonale Familie von Tripotenten $(e_i)_{i\in I}$
ist $f(\sum_{i\in I} e_i) = \sum_{i\in I} f(e_i)$,
(5) für jedes maximal abelsche Untertripel W ist $f|_W$
σ^*-stetig.

Beweis: Die Äquivalenz von (1),(3) und(4) wurde in (3.18), (3.19) und (3.21) gezeigt.
"Aus (1) folgt (2)":Die abgeschlossene Einheitskugel U^1 ist σ^*-kompakt.Daher gibt es ein $w \in U^1$ mit $\|f\| = f(w)$ und nach (3.14) ein vollständiges Tripotent e mit $w \in U_1(e)$.Aus (2.23) folgt $f(U_{1/2}(e)) = 0$,und aus (3.18) folgt $f|_{U_1(e)} \in U_1(e)_*$.
"Aus (2) folgt (1)":Nach (3.6) und (3.9) gibt es ein $g \in U_*$ mit $g|_{U_1(e)} = f|_{U_1(e)}$.Sei p die Peirce-Projektion auf $U_1(e)$. Dann ist nach (3.5) $f = f\circ p = g\circ p \in U_*$.
Offenbar folgt (5) aus (1).
"Aus (5) folgt (4)":Nach (3.15) ist $(e_i)_{i\in I}$ summierbar in der σ^*-Topologie.Das von $(e_i)_{i\in I}$ aufgespannte Untertripel V ist abelsch.Man wähle ein bezüglich der Inklusion maximales abelsches (notwendigerweise σ^*-abgeschlossenes) Untertripel W von U,das V enthält,und benutze (5). Qed

Zum Abschluß des Paragraphen wollen wir noch zeigen,daß die Eindeutigkeit des Präduals äquivalent ist zur partiellen σ^*-Stetigkeit des Tripelprodukts:
Die eine Richtung folgt dabei aus (3.22),für das die Existenz eines Präduals mit (3.4) vorausgesetzt wurde,die andere Richtung folgt aus:

(3.25) Satz Besitzt ein JB^*-Tripel U einen eindeutigen Prädual U_*, so ist das Tripelprodukt in jeder Komponente $\sigma(U,U_*)$-stetig.

Beweis: Für alle $x \in U$ ist $x \square x^*$ hermitesch. Wegen der Eindeutigkeit des Präduals und [P,3.4] ist daher $x \square x^*$ σ^*-stetig. Nach der Polarisationsformel (1.10) ist dann $x \square y^*$ σ^*-stetig für alle $x,y \in U$. Insbesondere sind die Peirce-Projektionen σ^*-stetig.
Für $x \in U$ ist $Q(x)$ σ^*-stetig genau dann, wenn für alle $f \in U_*$ auch $f \circ Q(x) \in U_*$ ist. Nach dem Beweis von (3.24)(2) gibt es zu $f \in U_*$ ein Tripotent e in U mit $f = f \circ Q(e)^2$ (vgl. (1.14)). Es genügt daher zu zeigen, daß $Q(e)^2 Q(x)$ σ^*-stetig ist. Nach [Mc,0.6] gilt für alle $y,z \in U$: $Q(y)Q(z) = 2(y \square z^*)^2 - y \square \{zy^*z\}^*$. Daher ist $Q(y)Q(z)$ σ^*-stetig. $Q(e)\big|_{U_1(e)}$ ist die Involution der JBW^*-Algebra $U_1(e)$, daher σ^*-stetig [E,3.3]. Die Peirce-Projektion $Q(e)^2$ ist σ^*-stetig, daher auch $Q(e) = Q(e)^3$. Schließlich ist damit $Q(e)Q(e)Q(x)$ σ^*-stetig.
Qed

§ 4 Ein Fortsetzungssatz

Für einen normierten Raum A bezeichne A^r ($r \in \mathbb{R}^+$) die abgeschlossene Kugel um 0 mit Radius r.

(4.1) Lemma Seien U_k ($k = 1,2$) Banachräume mit Prädualen, seien S_k Unterräume von U_k, so daß S_k^1 σ^*-dicht in U_k^1 ist, sei $\varphi : S_1 \to S_2$ eine surjektive Isometrie, sei $\varphi|_{S_1^1}$ ein Homöomorphismus (von S_1^1 auf S_2^1) bezüglich der relativen σ^*-Topologien.
Dann läßt sich φ eindeutig fortsetzen zu einer surjektiven Isometrie $\Phi : U_1 \to U_2$.

Beweis: Die topologischen Vektorräume (U_k, σ^*) ($k = 1,2$) besitzen eindeutige mit der Topologie verträgliche, translationsinvariante Uniformitäten [Sch, I1.4]. Bezüglich der von diesen auf S_k^r ($r \in \mathbb{R}^+$) induzierten Uniformitäten ist $\varphi|_{S_1^r}$ ein uniformer Isomorphismus von S_1^r auf S_2^r. U_k^r ist vollständig in der σ^*-Topologie [Sch, IV6.1] und S_k^r ist σ^*-dicht in U_k^r.
$\varphi|_{S_1^r}$ setzt sich daher auf eindeutige Weise fort zu einem uniformen Isomorphismus $\Phi_r : U_1^r \to U_2^r$ [Ke, 6.26] . Φ_r ist ein Homöomorphismus bezüglich der relativen σ^*-Topologien [Ke, 6.9]. Wegen der Eindeutigkeit von Φ_r ist $\Phi_r|_{U_1^s} = \Phi_s$ für $s \leq r$. Durch $\Phi|_{U_1^r} = \Phi_r$ wird daher eine Fortsetzung $\Phi : U_1 \to U_2$ von φ definiert. Φ ist bijektiv und ist linear, weil Φ_r σ^*-stetig und S_1^r σ^*-dicht in U_1^r für alle $r \in \mathbb{R}^+$ ist. Ferner gilt $\Phi(U_1^1) = U_2^1$. Also ist Φ surjektive Isometrie. Qed

Beachtet man, daß die surjektiven Isometrien von JB^*-Tripeln genau die Isomorphismen sind (2.11), so kann man aus (4.1) einen Fortsetzungssatz für JBW^*-Tripel gewinnen.
Um diesen in der für die Anwendungen geeigneten Weise formulieren zu können, benötigen wir zunächst:

(4.2) Def Sei U ein Banachraum.Eine Projektion p auf U (3.16) heiße kontraktiv,wenn $\|p\| = 1$ ist.
Durch "$p \preccurlyeq q :\Leftrightarrow pq = qp = p$" wird auf der Menge der Projektionen auf U eine Ordnung definiert.
Eine Familie $\mathcal{P}$ von Projektionen auf U heiße nach oben gerichtet,wenn sie gerichtet ist bezüglich "$\preccurlyeq$".
$\mathcal{P}$ heiße treu,wenn es zu jedem $0 \neq x \in U$ ein $p \in \mathcal{P}$ mit $p(x) \neq 0$ gibt.

(4.3) Lemma Sei U ein Banachraum mit einem Prädual U_*,sei $\mathcal{P}$ eine treue Familie σ^*-stetiger Projektionen auf U,sei für $p \in \mathcal{P}$ $V_p := \{f \in U_* \mid f = f \circ p\}$.
Dann ist der lineare Aufspann V von $\bigcup_{p \in \mathcal{P}} V_p$ norm-dicht in U_*.

Beweis: V trennt die Punkte von U:Zu $0 \neq x \in U$ gibt es ein $p \in \mathcal{P}$ mit $p(x) \neq 0$ und dazu ein $g \in U_*$ mit $g(p(x)) \neq 0$.Es ist $g \circ p \in V_p$.
Nach dem Satz von Hahn-Banach ist V norm-dicht in U_*. Qed

(4.4) Lemma Sei U ein Banachraum mit einem Prädual U_*,sei $\mathcal{P}$ eine nach oben gerichtete,treue Familie von σ^*-stetigen, kontraktiven Projektionen auf U.
Dann konvergiert $(p(x))_{p \in \mathcal{P}}$ bezüglich σ^* gegen x.Insbesondere ist die abgeschlossene Einheitskugel S^1 des Teilraums $S := \bigcup_{p \in \mathcal{P}} p(U)$ σ^*-dicht in U^1.

Beweis: Sei $x \in U$.$(p(x))_{p \in \mathcal{P}}$ ist ein durch $\|x\|$ beschränktes Netz in S.
Seien V_p,V wie in (4.3).U^1 ist σ^*-kompakt,die von $\sigma(U,V)$ auf U^1 induzierte Topologie ist Hausdorffsch (4.3) und gröber als die von $\sigma(U,U_*)$ induzierte,stimmt daher mit dieser überein.Es ist daher zu zeigen,daß $(p(x))_{p \in \mathcal{P}}$ gegen x konvergiert bezüglich $\sigma(U,V)$.
Sei dazu $f = f \circ p \in V_p$.Dann ist für alle $q \in \mathcal{P}$ mit $p \preccurlyeq q$:$f(x) = f(q(x))$.Somit ist $\sigma(U,V) - \lim_{p \in \mathcal{P}} p(x) = x$. Qed

(4.5) Satz Seien $(p_{kj})_{j\in J}$ $(k = 1,2)$ nach oben gerichtete, treue Familien von σ^*-stetigen, kontraktiven Projektionen auf JBW*-Tripeln U_k, deren Bilder Untertripel von U_k seien, seien $S_k := \bigcup_{j\in J} p_{kj}(U_k)$.
Dann besitzt jeder Tripelisomorphismus $\varphi : S_1 \to S_2$ mit $p_{2j}\circ\varphi = \varphi\circ p_{1j}|_{S_1}$ für alle $j\in J$ eine eindeutige Fortsetzung zu einem Tripelisomorphismus $\Phi : U_1 \to U_2$.

Beweis: Für alle $j\in J$ ist $p_{kj}(U_k)$ $(k = 1,2)$ ein JBW*-Tripel (3.6), daher ist $\varphi|_{p_{1j}(U_1)}$ eine Isometrie von $p_{1j}(U_1)$ auf $p_{2j}(U_2)$, und somit ist φ eine surjektive Isometrie.
Nach (4.4) ist für $k = 1,2$ S_k^1 σ^*-dicht in U_k^1.
$\varphi|_{S_1^1}$ ist ein Homöomorphismus bezüglich der relativen σ^*-Topologien: Wie in (4.3) sei für $k = 1,2$ V_k der lineare Aufspann der $V_{kj} := \{f\in (U_k)_* \mid f = f\circ p_{kj}\}$ $(j\in J)$. $\sigma(U_k, V_k)$ stimmt auf U_k^1 mit σ^* überein (vgl. den Beweis von (4.4)). Es genügt daher zu zeigen, daß es zu jedem $f\in V_2$ ein $g\in V_1$ mit $f\circ\varphi = g|_{S_1}$ gibt.

Sei für ein $j\in J$ $f = f\circ p_{2j} \in V_2$. Dann ist $f|_{p_{2j}(U_2)}$ σ^*-stetig und wegen (3.23) ist dann auch $f\circ\varphi|_{p_{1j}(U_1)}$ σ^*-stetig. Daher ist $g := f\circ\varphi\circ p_{1j} \in V_{1j}$, und es gilt $f\circ\varphi = f\circ p_{2j}\circ\varphi = f\circ\varphi\circ p_{1j}|_{S_1} = g|_{S_1}$.
Nach (4.1) besitzt daher φ eine eindeutige isometrische Fortsetzung $\Phi : U_1 \to U_2$. Φ ist nach (2.11) ein Tripelisomorphismus. Qed

§ 5 Ideale in JBW*-Tripeln

(5.1) Def Ein Unterraum J eines Jordan -*- Tripels U heiße ein Ideal, wenn $\{UU^*J\} + \{UJ^*U\} \subset J$.
Zwei Ideale J und K von U heißen orthogonal, wenn $J \cap K = 0$. Es gilt dann $J \square K^* = K \square J^* = 0$.
Für ein JBW*-Tripel U und ein $x \in U$ bezeichne U(x) das von x in U erzeugte σ^*-abgeschlossene Ideal.

(5.2) Satz Sei U ein JBW*-Tripel, e ein vollständiges Tripotent in U. Dann gelten:
(1) Für jede e- zentrale Projektion z ist $U(z) = U_1(z) + U_{1/2}(z)$ und $U_1(z) = U(z) \cap U_1(e)$.
(2) Zu jedem σ^*-abgeschlossenen Ideal $0 \neq J \subset U$ gibt es eine eindeutige e-zentrale Projektion e(J) mit U(e(J)) = J.
(3) Für jede e-zentrale Projektion z ist e(U(z)) = z.
(4) Zu jedem σ^*-abgeschlossenen Ideal J in U gibt es ein eindeutiges σ^*-abgeschlossenes Ideal $J^\perp$ mit $U = J \oplus J^\perp$.
(5) Für σ^*-abgeschlossene Ideale J und K in U gilt $e(J \cap K) = \{e(J)e^*e(K)\}$ (wobei e(0) := 0) und $J = J \cap K \oplus J \cap K^\perp$.
Insbesondere sind also J und K orthogonal genau dann, wenn e(J) und e(K) dies sind.
(6) Sei $(U_k)_{k \in K}$ eine orthogonale Familie σ^*-abgeschlossener Ideale in U, sei $\sum_{k \in K} U_k$ der σ^*-Abschluß ihrer linearen Hülle. Dann ist $\sum_{k \in K} U_k$ ein Ideal in U mit $e(\sum_{k \in K} U_k) = \sum_{k \in K} e(U_k)$ (Summation bezüglich σ^*).
(7) $\sum_{k \in K} U_k$ ist isometrisch isomorph zu $\oplus^\infty_{k \in K} U_k$.

Beweis: (1) w := e-z ist ein zu z orthogonales Tripotent. Man betrachte die Peirce-Räume bezüglich $\{z,w\}$. (Für die Bezeichnungen siehe (1.20).) Da z eine e-zentrale Projektion ist, ist $U_1(e) \cap U_{1/2}(z) = 0$, insbesondere ist also $U_{z,w} = 0$. $U_1(z) + U_{1/2}(z)$ ist ein Ideal in U: nach (1.21) ist nur noch zu zeigen, daß $U_{z,o} \square U^*_{w,o} = U_{w,o} \square U^*_{z,o} = 0$ ist.
Angenommen, es gebe $a \in U_{z,o}, b \in U_{w,o}$ mit $a \square b^* \neq 0$. OBdA sei

a ein Tripotent (3.13).Es ist $a \perp w$,daher ist $c := a+w$ ein Tripotent.Sei $b = b_1+b_{1/2}+b_o$ mit $b_k \in U_k(a)$ für $k = 0,1/2,1$.
Es ist $b_1 = Q(a)^2 b = 0$ (1.21),$b_{1/2} \in U_{w,o}$ (da a,z und w verträglich sind) und $b_{1/2} \neq 0$ wegen $a \square b^* \neq 0$,also ist $0 \neq \{cb_{1/2}^*c\} = 2\{ab_{1/2}^*w\} \in U_{z,w}$ (1.21),ein Widerspruch.
Genauso erhält man $U_{w,o} \square U_{z,o}^* = 0$.
Wegen $U_1(z) + U_{1/2}(z) \subset U(z)$ folgt der Rest der Behauptung.

(2) Wäre $J \cap U_1(e) = 0$,so wäre $J \subset U_{1/2}(e)$,da J ein Ideal ist. Aber $U_1(e) \supset \{JJ^*e\} \neq 0$,wie mit (3.13) und (1.24) folgt. Daher ist $o \neq J \cap U_1(e)$ ein $*$-Ideal in der JBW*-Algebra $U_1(e)$. Nach [E,4.3] gibt es eine eindeutige e-zentrale Projektion z mit $U_1(z) = J \cap U_1(e)$.Also ist $J \cap U_1(e-z) = 0$.Nach dem Beweis von (1) ist $U_{1/2}(e) = U_{1/2}(z) \oplus U_{1/2}(e-z)$.Wäre $J \cap U_{1/2}(e-z) \neq 0$,so auch (wie oben) $J \cap U_1(e-z) \neq 0$.
Daher ist $J \subset U_1(z) + U_{1/2}(z) = U(z)$ und damit $J = U(z)$.
Man setze $e(J) := z$.

(3) Nach (2) ist $U(e(U(z))) = U(z)$.Aus der Eindeutigkeitsaussage in (2) folgt $e(U(z)) = z$.

(4) Man definiere $J^\perp := U(e-e(J))$.Mit (1) folgt die Behauptung.

(5) Mit (1) folgt:$U_1(e(J \cap K)) = J \cap K \cap U_1(e) = U_1(e(J)) \cap U_1(e(K))$
$= U_1(\{e(J)e^*e(K)\})$,wobei $U_1(0) := 0$.Da $e(J \cap K)$ und $\{e(J)e^*e(K)\}$ e-zentrale Projektionen sind,folgt der erste Teil der Behauptung.
$J \cap K \oplus J \cap K^\perp$ enthält $\{e(J)e^*e(K)\} + \{e(J)e^*(e-e(K))\} = e(J)$,daher $J = J \cap K \oplus J \cap K^\perp$.

(6) $\sum_{k \in K} U_k$ ist ein Ideal wegen (3.4).$(e(U_k))_{k \in K}$ ist wegen (5) eine orthogonale Familie e-zentraler Projektionen.
Dann ist $z := \sum_{k \in K} e(U_k) \in \sum_{k \in K} U_k$ (Summation bezüglich σ^*).
Wegen $U_k \subset U(z)$ für alle $k \in K$ ist also $U(z) = \sum_{k \in K} U_k$.Mit (3) folgt die Behauptung.

(7) OBdA sei $U = \sum_{k\in K} U_k$. Sei q_k die natürliche Projektion von U auf U_k, sei J die Menge der endlichen Teilmengen von K, für $j \in J$ sei $p_j := \sum_{k\in j} q_k$.
p_j ist für alle $j\in J$ kontraktiv, denn p_j ist die Peirce-0-Projektion von $e-e(p_j(U))$ (2.21). p_j ist σ^*-stetig. $(p_j)_{j\in J}$ ist offenbar nach oben gerichtet und ist treu: Wähle zu $0 \neq x \in U$ ein vollständiges Tripotent f in U so, daß $x \in U_1(f)$ (3.14). Dann ist $f = \sum_{k\in K} f(U_k)$ nach (6), also $Q(f(U_k))(x) \neq 0$ für ein $k\in K$, d.h. $p_{\{k\}}(x) \neq 0$.
Sei $S := \bigcup_{j\in J} p_j(U)$. Sei $\tilde{U} := \oplus^{\infty}_{k\in K} U_k$, $\tilde{q}_k, \tilde{p}_j, \tilde{S}$ seien analog definiert. $(\tilde{p}_j)_{j\in J}$ ist dann ebenfalls eine nach oben gerichtete, treue Familie von kontraktiven, σ^*-stetigen Projektionen auf $\tilde{U}$.
$\Phi : U \to \tilde{U} : x \mapsto (q_k(x))_{k\in K}$ ist wohldefiniert.
$\varphi := \Phi|_S$ ist ein Tripelisomorphismus mit $\tilde{p}_j \circ \varphi = \varphi \circ p_j|_S$ für alle $j\in J$. Nach (4.5) gibt es einen eindeutig bestimmten Tripelisomorphismus $\tilde{\Phi}$, der φ fortsetzt. Nach (2.11) ist $\tilde{\Phi}$ isometrisch und nach (3.23) ist $\tilde{\Phi}$ σ^*-stetig. Wegen (4.4) ist dann sogar $\Phi = \tilde{\Phi}$.
Qed

Ein Jordan -$*$- Tripel heiße <u>unzerlegbar</u>, wenn aus $U = V \oplus W$ für Ideale V und W in U folgt: $V = U$ oder $W = U$.

(5.3) <u>Korollar</u> Sei U ein JBW*-Tripel, e ein vollständiges Tripotent in U. Dann sind äquivalent:
(1) U ist unzerlegbar.
(2) U und 0 sind die einzigen σ^*-abgeschlossenen Ideale in U.
(3) Die JBW*-Algebra $U_1(e)$ ist ein Faktor (d.h. besitzt triviales Zentrum $Z(U_1(e)) = \mathbb{C}e$).

<u>Beweis:</u> Die Äquivalenz von (2) und (3) folgt aus (5.2)(1) und (5.2)(2). (2) folgt aus (1) mit (5.2)(4).
Ist $U = V \oplus W$ für Ideale V und W, so ist $e = e_V \oplus e_W$ mit $e_V \in V$,

$e_W \in W$,und e_V und e_W sind e-zentrale Projektionen.Gilt nun (3),so folgt $e_V = e$ oder $e_W = e$,und wegen der Vollständigkeit von e folgt V = U oder W = U. Qed

(5.4) Def Ein JBW*-Tripel U,das eine der äquivalenten Bedingungen (5.3)(1)-(3) erfüllt,heiße ein JBW*-Tripelfaktor.

Will man nun JBW*-Tripel klassifizieren,so wird man analog zum Fall der W*-Algebren und JBW*-Algebren zu folgenden Definitionen geführt:

(5.5) Def Ein Tripotent p in einem Jordan - *- Tripel U heiße abelsch,wenn $U_1(p)$ ein abelsches Jordan - *- Tripel ist.($U_1(p)$ ist dann eine assoziative Jordan - *- Algebra gemäß (1.15).)
p heiße minimal,wenn $U_1(p) = \mathbb{C}p$ ist.
Eine Projektion in einer Jordan - *- Algebra heiße abelsch (minimal),wenn sie in dem Tripelprodukt (1.11) ein abelsches (minimales) Tripotent ist.

(5.6) Lemma Ein abelsches Tripotent in einem JBW*-Tripelfaktor ist minimal.

Beweis: Nach (3.14) gibt es ein vollständiges Tripotent e in U,so daß p eine e-Projektion ist.$U_1(e)$ ist ein JBW*-Algebra-Faktor (5.3),daher ist p minimal in $U_1(e)$ [H,5.2.17]. Wegen $U_1(p) \subset U_1(e)$ ist p minimal in U. Qed

(5.7) Def Ein JBW*-Tripel U heiße vom Typ I,wenn es ein abelsches Tripotent p in U mit U = U(p) gibt oder wenn U = 0 ist.

Für JBW*-Algebren (bzw. für ihre selbstadjungierten Teile, die JBW-Algebren) definiert man bekanntlich [To,§7]:

(5.8) Eine JBW*-Algebra (bzw. eine JBW-Algebra) heiße vom Typ I, wenn es eine abelsche Projektion mit zentralem Träger $\mathbb{1}$ gibt.

(5.9) Satz Für ein JBW*-Tripel sind äquivalent:
(1) U ist vom Typ I.
(2) Jedes von 0 verschiedene, σ^*-abgeschlossene Ideal enthält ein abelsches Tripotent.
(3) Es gibt ein vollständiges Tripotent e in U, so daß die JBW*-Algebra $U_1(e)$ vom Typ I ist.

Beweis: "Aus (1) folgt (2)": Sei p ein abelsches Tripotent mit $U = U(p)$, sei $0 \neq J$ ein σ^*-abgeschlossenes Ideal in U, sei q die J-Komponente von p (vgl.(5.2)(4)). Es ist $q \neq 0$, da sonst $p \in J^\perp$ wäre, und q ist ein Tripotent. Wegen $U_1(q) \subset U_1(p)$ ist q abelsch.
"Aus (2) folgt (1)": Nach Zorn gibt es eine maximale Familie $(p_k)_{k \in K}$ von abelschen Tripotenten, so daß die Ideale $U(p_k)$ $(k \in K)$ paarweise orthogonal sind. Wegen (5.2)(6), (5.2)(4) und der Maximalität der Familie ist $U = \sum_{k \in K} U(p_k)$, also ist $\sum_{k \in K} p_k$ ein abelsches Tripotent in U mit $U = U(\sum_{k \in K} p_k)$.
"Aus (1) folgt (3)": Sei p ein abelsches Tripotent in U mit $U = U(p)$. Nach (3.14) gibt es ein vollständiges Tripotent e in U, so daß p (abelsche) e-Projektion ist. Nach [E,4.3] ist ein σ^*-abgeschlossenes $*$-Ideal J in einer JBW*-Algebra A von der Form $J = zA$ für eine zentrale Projektion z in A. Wegen (5.2)(1) und (5.2)(2) ist dann das von p in der JBW*-Algebra $U_1(e)$ erzeugte σ^*-abgeschlossene $*$-Ideal gleich $U_1(e)$.
"Aus (3) folgt (1)": Sei p eine abelsche e-Projektion, so daß das von p in $U_1(e)$ erzeugte σ^*-abgeschlossene $*$-Ideal gleich $U_1(e)$ ist. Nach (5.2)(1), (5.2)(2) und [E,4.3] ist dann $U = U(p)$. Qed

(5.10) Korollar Jedes σ^*-abgeschlossene Ideal J eines JBW*-Tripels U vom Typ I ist vom Typ I.

Beweis: Wegen (5.2)(4) ist jedes σ^*-abgeschlossene Ideal in J ein Ideal in U.Mit (5.9)(2) folgt die Behauptung. Qed

(5.11) Satz Für ein JBW*-Tripel U gibt es eine eindeutige Zerlegung in σ^*-abgeschlossene Ideale V und W,so daß V vom Typ I ist und W kein abelsches Tripotent enthält.

Beweis: Nach Zorn gibt es eine maximale Familie $(p_k)_{k\in K}$ von abelschen Tripotenten,so daß die Ideale $U(p_k)$ $(k\in K)$ paarweise orthogonal sind.$V:=\sum_{k\in K}U(p_k) = U(\sum_{k\in K}p_k)$ ist vom Typ I.Wegen der Maximalität von $(p_k)_{k\in K}$ enthält $W:= V^{\perp}$ kein abelsches Tripotent.
Ist nun $U = V' \oplus W'$ eine weitere Zerlegung der angegebenen Art,so ist $V = V\cap V' \oplus V\cap W'$ (5.2)(5).$V\cap W'$ ist ein σ^*-abgeschlossenes Ideal in V,das kein abelsches Tripotent enthält,daher $V\cap W' = 0$ nach (5.9) und $V\subset V'$.
Genauso erhält man $V'\subset V$,und wegen der Eindeutigkeit der Komplemente (5.2)(4) ist dann auch $W = W'$. Qed

§ 6 Beispiele

Im Rest der Arbeit sollen nun die JBW*-Tripel vom Typ I bis auf isometrische Isomorphie vollständig bestimmt werden. Es wird sich dabei zeigen, daß jedes JBW*-Tripel vom Typ I ℓ^∞-direkte Summe von JBW*-Tripeln aus einer der im folgenden vorgestellten Klassen von Beispielen ist.
Betrachten wir zunächst JBW*-Tripelfaktoren vom Typ I, die sogenannten Cartan-Faktoren (vgl. [Ka3, §3]).
Es gibt sechs Typen von Cartan-Faktoren:

Seien im folgenden m,n Kardinalzahlen mit $m \leq n$, seien H,K komplexe Hilberträume mit dim H = n, dim K = m.

Typ 1: Es sei $C_{nm}^1 := \mathcal{L}(H,K)$, versehen mit dem Tripelprodukt

(6.1) $\{xy^*z\} := 1/2(xy^*z + zy^*x) \quad (x,y,z \in \mathcal{L}(H,K))$

und der Operatornorm.
Der Isomorphietyp von $\mathcal{L}(H,K)$ hängt nur von n und m ab. $\mathcal{L}(H,K)$ ist auf natürliche Weise eingebettet in $\mathcal{L}(H \oplus^2 K)$. Auf diese Weise ist $\mathcal{L}(H,K)$ das Bild einer $\mathfrak{S}^*$-stetigen Projektion auf $\mathcal{L}(H \oplus^2 K)$.

Sei $j: x \mapsto \bar{x}$ eine Konjugation auf H, d.h. eine antilineare, involutorische Isometrie.
Für $z \in \mathcal{L}(H)$ sei die Transponierte von z erklärt durch $z^t := jz^*j$. Die Transposition ist ein komplex-linearer, involutorischer Antiisomorphismus von $\mathcal{L}(H)$.

Typ 2: Sei $n \geq 4$, sei $C_n^2 := \{z \in \mathcal{L}(H) \mid z = -z^t\}$, versehen mit dem Tripelprodukt (6.1) und der Operatornorm.

Typ 3: Sei $C_n^3 := \{z \in \mathcal{L}(H) \mid z = z^t\}$, versehen mit dem Tripelprodukt (6.1) und der Operatornorm.

Die Isomorphieklassen von C_n^2 und C_n^3 hängen nicht von der gewählten Konjugation j ab.
Die Transposition ist stetig bezüglich der ultraschwachen Operatortopologie (für die Definition siehe [Ta,II§2]). Daher sind C_n^2 und C_n^3 Bilder σ^*-stetiger Projektionen auf $\mathcal{L}(H)$.

Typ 4: Sei U ein $*$-invarianter,norm-abgeschlossener Teilraum von $\mathcal{L}(H)$ mit dim U >2,so daß $z^2 \in \mathbb{C}1$ für alle $z \in U$. Versehen mit dem Tripelprodukt (6.1) und der Operatornorm wird U zu einem JB*-Tripel.
Durch $(x|y)1 := xy^* + y^*x$ $(x,y \in U)$ wird U zu einem Hilbertraum mit Konjugation $j: x \mapsto x^*$.Die Hilbertnorm ist äquivalent zur Operatornorm auf U.Das Tripelprodukt (6.1) stimmt mit dem bezüglich des Jordan-Produkts $x \circ y := 1/2(xy + yx)$ gebildeten Tripelprodukt (1.11) überein.Man erhält daraus für alle $x,y,z \in U$:
(6.2) $\{xy^*z\} = 1/2((x|y)z + (z|y)x - (x|j(z))j(y))$.
Aus [Ha2,§1] erhält man noch:U ist σ^*-abgeschlossen in $\mathcal{L}(H)$.

Umgekehrt gibt es auf jedem Hilbertraum U der Dimension n>2 mit Konjugation j eine äquivalente Norm,so daß U,versehen mit dem Tripelprodukt (6.2),ein JB*-Tripel ist.U ist einfach. Die vollständigen orthogonalen Familien minimaler Tripotente in U sind genau die Mengen $\{x,y\}$ mit $x = j(y)$,$(x|y) = 0$ und $(x|x) = (y|y) = 1$.e:= x + y ist unitär in U.
(siehe [Ka3,§3])
Insbesondere ist also U imSinne von (2.19) ein JBW*-Algebra-Faktor mit Eins e,dessen selbstadjungierter Teil ein JBW-Faktor vom Typ I_2 ist.Aus [H,6.1.8 und 6.2.3] kann man dann schließen:U besitzt eine treue Darstellung als JBW*-Tripel von Operatoren auf einem Hilbertraum der oben angegebenen Art.Der Isomorphietyp von U hängt nur von n ab und wird mit C_n^4 bezeichnet.

(6.3) Die Unzerlegbarkeit von Cartan-Faktoren der Typen 1 bis 4 ist in [Ha2,Prop4.2] bewiesen. Sie enthalten minimale Tripotente [Ka3,§3] und haben Darstellungen als σ^*-abgeschlossene Untertripel von $\mathfrak{L}(L)$ für einen komplexen Hilbertraum L. Sie sind daher JBW*-Tripelfaktoren vom Typ I.

Es ist nun günstiger, zunächst den Typ 6 zu behandeln. Zu dessen Beschreibung benötigt man die komplexen Cayley-Zahlen $\mathbb{O}$. Da ihre Multiplikationstafel in §7 sowieso gebraucht wird, sei sie hier schon angegeben:

(6.4) $\mathbb{O}$ ist eine achtdimensionale, komplexe (nichtassoziative) Algebra mit der Standard-Basis $\{e_0,\dots,e_7\}$, deren Multiplikationstafel gegeben ist durch:

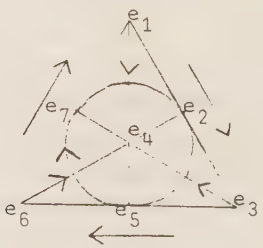
(i) $e_0e_j = e_je_0 = e_j$ $(j = 0,\dots,7)$

(ii) $e_j^2 = -e_0, e_je_k = -e_ke_j$ $(j,k = 1,\dots,7, j \neq k)$

(iii) $e_1e_2 = e_3, e_1e_4 = e_5, e_6e_7 = e_1, e_2e_5 = e_7, e_6e_4 = e_2,$
$e_3e_4 = e_7, e_3e_5 = e_6$

(iv) Bei zyklischer Vertauschung der Indizes bleiben alle Gleichungen richtig.

An folgendem Diagramm [D,I3.9] läßt sich die Multiplikationstafel (iii) ablesen:



(6.5) Für $a = \sum_{i=0}^{7} t_i e_i \in \mathbb{O}$ sei : $a^j := t_o e_o - \sum_{i=1}^{7} t_i e_i$,
$\bar{a} := \sum_{i=0}^{7} \bar{t}_i e_i$ und $a^* := \bar{a}^j$
j bzw. $*$ sind komplex-lineare bzw. komplex-antilineare Algebra-Involutionen auf $\mathbb{O}$.
Der reelle Aufspann der Standard-Basis ist die reelle Cayley-Divisionsalgebra $\mathbb{O}_{\mathbb{R}}$.

Typ 6: $M_3(\mathbb{O})$ bezeichne den Raum der 3x3 - Matrizen über $\mathbb{O}$, ^{t} die übliche Transposition.Dann ist
$C^6 := \{A \in M_3(\mathbb{O}) \mid A = {}^tA^j\}$ eine Jordan-Algebra in dem Produkt $A \circ B := 1/2(AB + BA)$ für $A,B \in C^6$.
C^6 ist einfach und ist exzeptionell,d.h. nicht isomorph zu einer Jordan-Unteralgebra einer mit dem Jordan-Produkt versehenen assoziativen Algebra.
[Ja2,ChI§5,§10,ChV]
Durch $(a_{mn})^*_{1\leq m,n\leq 3} := (\overline{a_{mn}})_{1\leq m,n\leq 3}$ wird auf C^6 eine (antilineare) Involution definiert,deren Fixraum die reelle Jordan-Algebra $\mathcal{H}_3(\mathbb{O}_{\mathbb{R}})$ der hermiteschen 3x3 - Matrizen über $\mathbb{O}_{\mathbb{R}}$ ist. $\mathcal{H}_3(\mathbb{O}_{\mathbb{R}})$ ist formal-reell [Jo,FundTh2],daher eine JB -Algebra [H,2.9.2,3.1.7].
Es gibt somit auf C^6 eine eindeutige Norm,mit der C^6 zu einer JB*-Algebra wird [W].Weil C^6 endlich-dimensional ist, ist C^6 somit eine einfache JBW*-Algebra vom Typ I.
Mit dem Tripelprodukt (1.11) ist dann C^6 ein JBW*-Tripelfaktor vom Typ I.

Typ 5: Sei $M_{1,2}(\mathbb{O})$ der Raum der 1x2 - Matrizen über $\mathbb{O}$.
Für $x = (a,b) \in M_{1,2}(\mathbb{O})$ sei $x^* = \begin{pmatrix} a^* \\ b^* \end{pmatrix}$.
Mit dem Produkt $\{xy^*z\} := 1/2(x(y^*z) + z(y^*x))$ wird $M_{1,2}(\mathbb{O})$ zu einem Jordan -$*$- Tripel,das nicht als Untertripel in eine spezielle Jordan -$*$- Algebra mit dem Tripelprodukt (1.11) eingebettet werden kann.Jedoch kann $M_{1,2}(\mathbb{O})$ eingebettet werden in C^6 vermöge:

$$(a,b)\longmapsto\begin{pmatrix}0 & a & b\\ a^j & 0 & 0\\ b^j & 0 & 0\end{pmatrix}\ .$$

Daher gibt es auf $M_{1,2}(\mathbb{O})$ eine Norm,mit der $M_{1,2}(\mathbb{O})$ zu einem JB*-Tripel wird.(Bezeichnung: C^5)
Nach [Lo1,17.4] ist C^5 unzerlegbar.
C^5 ist daher ein JBW*-Tripelfaktor vom Typ I.

(6.6) Die aus JBW*-Algebra-Faktoren vom Typ I gemäß (1.11) gebildeten JBW*-Tripel sind genau die Cartan-Faktoren $C^1_{nn}, C^2_{2n}, C^3_n, C^4_n, C^6$:
Die angegebenen Cartan-Faktoren enthalten ein unitäres Tripotent e und eine minimale e-Projektion.:Für C^1_{nn}, C^3_n, C^6 ist dies offenbar,C^4_n wurde oben diskutiert,für C^2_{2n} siehe [Ka2,S.362].Sie werden daher nach (2.19) und (5.3) zu JBW*-Algebra-Faktoren vom Typ I.
Umgekehrt ist jeder JBW*-Algebra-Faktor vom Typ I in der obigen Liste enthalten [A1,Th3.1].

Zu jedem der obigen Cartan-Faktoren gibt es bis auf *-Isomorphie genau einen JBW*-Algebra-Faktor vom Typ I,aus dem dieser Cartan-Faktor gemäß (1.11) hervorgeht,wie man der Liste in [A1,Th3.1] und der Liste der Isomorphieinvarianten [Ka3,(3.3)] entnehmen kann.
Die zugehörigen Algebra-Faktoren werden mit $A^1_n, A^2_n, A^3_n, A^4_n$ A^6 bezeichnet.
A^1_n (bzw. A^2_n, A^3_n, A^6) heißen vom rechteckigen (bzw. antisymmetrischen,symmetrischen,Ausnahme-) Typ.
A^4_n heiße komplexer Spinfaktor der Dimension n (oder vom Typ $I_{2,n-1}$).

Die JBW-Faktoren vom Typ I sind genau die selbstadjungierten Teile der JBW*-Algebra-Faktoren vom Typ I und werden mit $(A^1_n)_{sa}$ usw. bezeichnet.

Es folgen Beispiele für JBW*-Tripel vom Typ I, die nicht notwendig Faktoren sind:

Dazu benötigt man zunächst einige Begriffe aus der Maßtheorie (siehe dafür [Bo1], [Bo2], [To,I,VI,VII], [Ta,IV§7]):

Sei T ein lokalkompakter Raum, μ ein positives Radonmaß auf T (im Sinne von [Bo1]), E ein komplexer Banachraum.
Sei V ein komplexer Vektorraum komplexwertiger Funktionen auf T. $V \otimes E$ werde identifiziert mit einem Raum von Funktionen von T nach E vermöge $\sum_{i=1}^{n} v_i \otimes e_i \longmapsto \sum_{i=1}^{n} v_i(.)e_i$.
E werde identifiziert mit den konstanten Funktionen von T nach E.

Für $1 \leq p < \infty$ und eine (stark) μ-meßbare Funktion f von T nach E (im Sinne von [Ta,IVDef7.1]) sei
$N_p(f) := (\int_T \|f(t)\|^p d\mu(t))^{1/p}$.
Sei $\mathcal{K}(T)$ der Raum der komplexwertigen stetigen Funktionen auf T mit kompaktem Träger.
Sei $\mathcal{L}^p(T,\mu,E)$ der Raum der (stark) μ-meßbaren Funktionen $f:T \to E$ mit $N_p(f) < \infty$. N_p ist eine Seminorm auf $\mathcal{L}^p(T,\mu,E)$.
Sei $\mathcal{N}^p := \{f \in \mathcal{L}^p(T,\mu,E) \mid N_p(f) = 0\}$.
$L^p(T,\mu,E) := \mathcal{L}^p(T,\mu,E)/\mathcal{N}^p$ ist ein Banachraum mit Norm N_p.
$\mathcal{K}(T) \otimes E / (\mathcal{N}^p \cap (\mathcal{K}(T) \otimes E))$ ist dicht in $L^p(T,\mu,E)$.
[Ta,IV7.4]

Eine nur von einem Argument $t \in T$ abhängende Aussage P(t) gelte lokal μ-fast überall (f.ü.), wenn für jede kompakte Teilmenge $K \subset T$ die Menge der $t \in K$, für die P(t) nicht gilt, eine μ-Nullmenge ist.

Eine reelle Zahl $M > 0$ heiße eine Fastschranke einer Funktion $f:T \to \mathbb{R}^+$, wenn $f(t) \leq M$ lokal μ-f.ü..

Sei $N_\infty(f)$ das Infimum der Fastschranken.
Für eine Funktion $f:T\to E$ sei $N_\infty(f) := N_\infty(\|f(.)\|)$.

$\mathcal{L}^\infty(T,\mu,E)$ bezeichne den Raum der beschränkten, (stark) μ-meßbaren Funktionen von T nach E, versehen mit der Seminorm N_∞.
$\mathcal{N}^\infty(T,\mu,E)$ sei der Raum der Funktionen f in $\mathcal{L}^\infty(T,\mu,E)$ mit $N_\infty(f) = 0$.
$L^\infty(T,\mu,E) := \mathcal{L}^\infty(T,\mu,E)/\mathcal{N}^\infty(T,\mu,E)$, versehen mit der Norm N_∞, ist ein Banachraum [Bo1, IV§6N° 3].
E kann auf kanonische Weise mit einem Unterraum von $L^\infty(T,\mu,E)$ identifiziert werden.

Sei nun E_* ein Prädual von E. Zwei Funktionen f und g von T nach E heißen <u>schwach μ-fast überall gleich</u> (bezüglich E_*), wenn $x\circ f$ und $x\circ g$ lokal μ-f.ü. gleich sind für alle $x\in E_*$.

Sei $\mathcal{L}^\infty_w(T,\mu,E)$ der Raum der beschränkten Funktionen $f:T\to E$, so daß $x\circ f$ μ-meßbar ist für alle $x\in E_*$, versehen mit der Seminorm N_∞. (Diese Definition ist äquivalent zu [Io, VIDef3]; vgl. dazu auch [Io, I 9.II].)
Sei $\mathcal{N}^\infty_w(T,\mu,E)$ der Raum der Funktionen aus $\mathcal{L}^\infty_w(T,\mu,E)$, die schwach μ-f.ü. gleich Null sind.
$L^\infty_w(T,\mu,E) := \mathcal{L}^\infty_w(T,\mu,E)/\mathcal{N}^\infty_w(T,\mu,E)$ ist ein Banachraum mit der Norm N_∞, gegeben durch
$N_\infty(f+\mathcal{N}^\infty_w(T,\mu,E)) := \inf\{N_\infty(g) \mid g\in f+\mathcal{N}^\infty_w(T,\mu,E)\}$.
[Io, VIProp1Cor]

$L^\infty_w(T,\mu,E)$ kann mit dem Dual von $L^1(T,\mu,E_*)$ identifiziert werden vermöge $\langle f,x\rangle := \int_T \langle f(t),x(t)\rangle\, d\mu(t)$, wobei $f\in L^\infty_w(T,\mu,E)$, $x\in L^1(T,\mu,E_*)$ ist. [Io, VIITh7Cor]

$L^\infty(T,\mu,E)$ kann auf kanonische Weise mit einem Unterraum von $L^\infty_w(T,\mu,E)$ identifiziert werden. [Io, VITh12]

Ist E separabel oder reflexiv,so sind die beiden Räume gleich [Io,VI§5Rem. und VIITh6].

Bemerkung: Zur Übertragung der nur für reelle Banachräume formulierten Ergebnisse in [Io] auf einen komplexen Banachraum F betrachte man den unterliegenden reellen Banachraum $F_{\mathbb{R}}$ und beachte,daß $(F^*)_{\mathbb{R}}$ mit $(F_{\mathbb{R}})^*$ (isometrisch) identifiziert werden kann vermöge $f \mapsto \mathrm{Re}\, f$.

T,μ werden in der Bezeichnung auch weggelassen,wenn dadurch keine Unklarheiten entstehen.Ist $E = \mathbb{C}$,so wird E weggelassen,also $L^\infty := L^\infty(\mathbb{C}) := L^\infty(T,\mu,\mathbb{C})$ usw..
Die verschiedenen Äquivalenzklassenbildungen werden,sofern keine Verwechslung zu befürchten ist,sämtlich mit "[.]" bezeichnet.
Ferner sei $\mathfrak{S}^* := \mathfrak{S}(L^\infty_w(E),L^1(E_*))$,wenn der Bezug auf den Prädual $L^1(E_*)$ klar ist.

(6.7) Lemma Seien E,F komplexe Banachräume mit Prädualen E_*,F_*.Dann gelten:
(1) Die von $\mathfrak{S}(L^\infty_w(E),L^1(E_*))$ auf E ($\subset L^\infty_w(E)$) induzierte Topologie ist $\mathfrak{s}(E,E_*)$.
(2) Ist $p:E\to F$ ein $\mathfrak{S}^*$-stetiger,beschränkter Operator,so wird durch $\tilde{p}:[f]\mapsto[p\circ f]:L^\infty_w(E)\to L^\infty_w(F)$ ein $\mathfrak{S}^*$-stetiger,beschränkter Operator definiert.
(3) Ist F ein $\mathfrak{S}(E,E_*)$-abgeschlossener Teilraum von E mit Prädual $F_* := E_*/F^\circ$,so kann $L^\infty_w(F)$ in natürlicher Weise als Unterraum in $L^\infty_w(E)$ isometrisch eingebettet werden.
(4) Sei p eine $\mathfrak{S}(E,E_*)$-stetige Projektion auf E,sei $F := p(E), F_* := E_*/F^\circ$.Dann ist $\tilde{p}$ eine $\mathfrak{S}(L^\infty_w(E),L^1(E_*))$-stetige Projektion auf $L^\infty_w(E)$ mit $\tilde{p}(L^\infty_w(E)) = L^\infty_w(F)$.

Beweis: (1) Für $z'\in E, z\in E_*, f\in L^1$ ist $\langle z', f\otimes z\rangle = \langle z',z\rangle \int_T f(t)\,d\mu(t)$,d.h. $E_* = \{g|_E \mid g\in L^1\otimes E_*\}$.

$L^1 \otimes E_*$ ist dicht in $L^1(E_*)$,daher gilt auch $E_* = \{g|_E \mid g \in L^1(E_*)\}$. Dies ist die Behauptung.
(2) $\tilde{p}$ ist wohldefiniert und ein beschränkter Operator,weil p σ^*-stetig und beschränkt ist.Es ist ${}^t p \in \mathcal{L}(F_*, E_*)$.Daher gilt nach [Bo1,IV§3Th4] für $z \in \mathcal{L}^1(F_*)$: ${}^t\tilde{p}([z]) = [{}^t p \circ z] \in L^1(E_*)$. Damit ist $\tilde{p}$ σ^*-stetig.
(3) Sei $j:F \to E$ die Inklusionsabbildung.Wegen der Definition von F_* ist $\mathcal{L}^\infty_w(F) \subset \mathcal{L}^\infty_w(E)$.Die nach (2) von j induzierte Abbildung $\tilde{j}:L^\infty_w(F) \to L^\infty_w(E)$ ist isometrisch:Sei $f \in \mathcal{L}^\infty_w(F)$.Nach [Io,VIProp1] gilt für eine lineare Liftung ϱ' von $\mathcal{L}^\infty_w(E)$: $N_\infty(f + \mathcal{N}^\infty_w(E)) = N_\infty(\varrho'(f))$.Wegen der σ^*-Abgeschlossenheit von F in E ist $\varrho'(f) \in \mathcal{L}^\infty_w(F)$ (vgl. den Beweis von [Io,VIProp1]). Daher ist $N_\infty(f + \mathcal{N}^\infty_w(E)) = N_\infty(f + \mathcal{N}^\infty_w(F))$.
(4) Nach (2) ist $\tilde{p}$ ein σ^*-stetiger,beschränkter Operator auf $L^\infty_w(E)$.$\tilde{p}$ ist offenbar eine Projektion mit $\tilde{p}(L^\infty_w(E)) = L^\infty_w(F)$.
Qed

Sei nun H ein Komplexer Hilbertraum.Es wird im folgenden gezeigt,daß sich auf $U := L^\infty_w(T,\mu, \mathcal{L}(H))$ "punktweise" ein Produkt und eine Involution erklären lassen,mit denen U zu einer W^*-Algebra wird.Der Beweis stützt sich auf [Ta,IV§7].

Sei $\mathcal{M}$ eine von Neumann-Algebra,die auf H operiert.Gemäß der Bemerkung auf S.257 von [Ta] werde $L^2(T,\mu,H)$ identifiziert mit dem Hilbertraum-Tensorprodukt [Ta,IV1.2] $L^2(T,\mu) \bar{\otimes} H$ (vermöge $f \otimes x \mapsto f(.)x$).
Dann operiert das Tensorprodukt von von Neumann-Algebren $L^\infty(T,\mu) \bar{\otimes} \mathcal{M}$ auf $L^2(T,\mu,H)$ [Ta,IV1.3] .
Der Prädual von $L^\infty(T,\mu) \bar{\otimes} \mathcal{M}$ ist $L^1(T,\mu) \otimes_\gamma \mathcal{M}_*$,das projektive Tensorprodukt [Ta,IV§2] von $L^1(T,\mu)$ und $\mathcal{M}_*$,das gemäß [Ta,IV7.14] mit $L^1(T,\mu,\mathcal{M}_*)$ identifiziert werde.
[Sa.1.22.12 mit 1.22.10]

Sei nun $\mathcal{L}^\infty_{op}(T,\mu,\mathcal{M})$ die Menge der beschränkten Funktionen $x:T \to \mathcal{M}$,so daß $t \mapsto x(t)z:T \to H$ und $t \mapsto x(t)^* z:T \to H$ für alle $z \in H$

(stark)μ-meßbare Funktionen sind.

Durch $(\int_T^{\oplus} x(t)\,d\mu(t)\,)(f)(t) := x(t)f(t)$ für $f \in L^2(T,\mu,H)$ wird dann ein beschränkter Operator auf $L^2(T,\mu,H)$ definiert. [Ta,IV§7(4)]

Dann ist $\mathcal{L}^\infty_{op}(T,\mu,\mathcal{M}) \subset \mathcal{L}^\infty_w(T,\mu,\mathcal{M})$, denn die Elemente von $\mathcal{M}_*$ sind von der Form $x \longmapsto \sum_{n=1} \omega_{w_n,z_n}(x)$ für $w_n, z_n \in H$ mit $\sum_{n=1} \|w_n\|^2 < \infty$, $\sum_{n=1} \|z_n\|^2 < \infty$ und $\omega_{w,z}(x) := (xw|z)$ [Ta,II§2].

$\mathcal{L}^\infty_{op}(T,\mu,\mathcal{M})$ ist mit den punktweise erklärten Operationen eine $*$-Algebra [Ta,IV7.8].

(6.8) Lemma Für $a,b \in \mathcal{L}^\infty_{op}(T,\mu,\mathcal{M})$ gilt $[a] = [b]$ $(\in L^\infty_w(T,\mu,\mathcal{M}))$ genau dann, wenn $\int_T^{\oplus} a(t)\,d\mu(t) = \int_T^{\oplus} b(t)\,d\mu(t)$ ist.

Beweis: $\{1_K \otimes \omega_{u,v} \mid K \subset T, K$ integrierbar, $u,v \in H\}$ ist total in $L^1(T,\mu,\mathcal{M}_*)$.

$\{1_K \otimes u \mid K \subset T, K$ integrierbar, $u \in H\}$ ist total in $L^2(T,\mu,H)$.

$[a] = [b]$ ist äquivalent zu $\int_T \langle a(t),\varphi(t)\rangle\,d\mu(t) = \int_T \langle b(t),\varphi(t)\rangle\,d\mu(t)$ für alle $\varphi \in L^1(T,\mu,\mathcal{M}_*)$.

Ferner gilt für alle integrierbaren $K,L \subset T$ und $\varphi := 1_{K\cap L} \otimes \omega_{u,v}$ $(u,v \in H)$:

$\langle [a],\varphi\rangle = \int_T 1_{K\cap L}(t)\langle a(t)u|v\rangle\,d\mu(t) = \int_T \langle a(t)1_K(t)u|1_L(t)v\rangle\,d\mu(t) = \langle (\int_T^{\oplus} a(t)\,d\mu(t))(1_K \otimes u)|1_L \otimes v\rangle$

und $\langle [b],\varphi\rangle = \langle (\int_T^{\oplus} b(t)\,d\mu(t))(1_K \otimes u)|1_L \otimes v\rangle$.

Daraus folgt die Behauptung. Qed

(6.9) Satz Es gibt eine lineare Abbildung $i: L^\infty(T,\mu)\ \bar{\otimes}\ \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{L}^\infty_{op}(T,\mu,\mathcal{M})$, so daß gilt:

(1) $j: x \longmapsto [i(x)] : L^\infty(T,\mu)\ \bar{\otimes}\ \mathcal{M} \longrightarrow L^\infty_w(T,\mu,\mathcal{M})$ ist eine surjektive Isometrie und es ist $j(xy) = [i(x)i(y)]$, $j(x^*) = [i(x)^*]$ für alle $x,y \in L^\infty(T,\mu)\ \bar{\otimes}\ \mathcal{M}$.

(2) Ist F ein σ^*-abgeschlossener Unterraum von $\mathcal{M}$, $x \in L^\infty(T,\mu)\ \bar{\otimes}\ \mathcal{M}$ und $j(x) \in L^\infty_w(T,\mu,F)$, dann ist $i(x)(T) \subset F$.

Beweis: (1) Sei $x \in L^\infty(T,\mu) \,\bar{\otimes}\, \mathcal{M}$. Wähle $i(x) := x(.)$ wie im Beweis von [Ta,IV7.17(ii)]. (Es muß dort auf S.264, Zeilen 5 und 7, "$\Phi(x)\varphi$" anstatt "$\Phi(\varphi)$" heißen.) $L^\infty_w(T,\mu,\mathcal{M})$ und $L^\infty(T,\mu) \,\bar{\otimes}\, \mathcal{M}$ können mit dem Dual von $L^1(T,\mu,\mathcal{M}_*)$ identifiziert werden. Vermöge dieser Identifizierungen definieren dann x und j(x) dieselbe Linearform auf $L^1(T,\mu,\mathcal{M}_*)$ nach [Ta,IV7.17(i)]. j ist daher eine surjektive Isometrie. Seien nun $x,y \in L^\infty(T,\mu) \,\bar{\otimes}\, \mathcal{M}$, $f,g \in L^2(T,\mu)$, $u,v \in H$. Nach Wahl von i ist dann $(x(f \otimes u)|g \otimes v) = \int_T (f(t)i(x)(t)u|g(t)v)\, d\mu(t)$ $= ((\int_T^\oplus i(x)(t)\, d\mu(t))(f \otimes u)|g \otimes v)$ (vgl. den Beweis von [Ta,IV7.10]).

Weil das algebraische Tensorprodukt $L^2(T,\mu) \otimes H$ dicht in $L^2(T,\mu,H)$ ist, erhält man

(6.10) $x = \int_T^\oplus i(x)(t)\, d\mu(t)$.

Wegen [Ta,IV§7(5)] ist dann

$\int_T^\oplus i(xy)(t)\, d\mu(t) = xy = \int_T^\oplus i(x)(t)i(y)(t)\, d\mu(t)$ und

$\int_T^\oplus i(x^*)(t)\, d\mu(t) = x^* = \int_T^\oplus i(x)(t)^* d\mu(t)$.

Nach Lemma (6.8) ist dann $[i(xy)] = [i(x)i(y)]$ und $[i(x^*)] = [i(x)^*]$.

(2) Nach (6.7)(3) ist oBdA $L^\infty_w(T,\mu,F) \subset L^\infty_w(T,\mu,\mathcal{M})$. Es gibt ein $z \in \mathcal{L}^\infty_w(T,\mu,F)$ mit $[z] = j(x) = [i(x)]$. Sei F° die Polare von F in $\mathcal{M}_*$. Dann ist für alle $f \in L^1(T,\mu)$, $a \in F^\circ$:

$\langle f \otimes a, x \rangle = \langle f \otimes a, [z] \rangle = \int_T f(t)\langle a, z(t)\rangle\, d\mu(t) = 0$.

Da nach dem Beweis von [Ta,IV7.17(ii)] i(x) mit der im Beweis von [Ta,IV7.16] gewählten - dort mit $\varphi(.)$ bezeichneten - Funktion übereinstimmt, gilt mit den dortigen Bezeichnungen $\Phi(\varphi)a = 0$ und damit $\langle a, i(x)(t)\rangle = 0$ für alle $a \in F^\circ$, $t \in T$, d.h. $i(x)(t) \in F^{\circ\circ} = F$ für alle $t \in T$. Qed

(6.11) Korollar $L^\infty_w(T,\mu,\mathcal{M})$ wird mit den für Repräsentanten $f,g \in \mathcal{L}^\infty_{op}(T,\mu,\mathcal{M})$ punktweise erklärten Operationen $[f][g] := [fg]$ und $[f]^* := [f^*]$ zu einer W^*-Algebra.

Beweis: Nach Satz (6.9) ist nur noch zu zeigen,daß die Operationen von der Wahl der Repräsentanten in $\mathcal{L}^{\infty}_{op}(T,\mu,\mathcal{M})$ unabhängig sind.Dies folgt mit Lemma (6.8) und [Ta,IV§7(5)]. Qed

(6.12) Bemerkung: Für den Fall $\mathcal{M} = \mathcal{L}(H)$ - der für unsere Zwecke ausreichend ist - ist (6.11) im Beweis von [St,Th3] enthalten.Leider enthält der betreffende Teil des Beweises einen Fehler (Bezeichnungen wie bei [St1],auch wenn sie von den hier verwandten abweichen):
In Zeile 6 von S.481 wird behauptet: $\sup_\beta \sum_\alpha \|T_{\alpha\beta}\|^2 < \infty$.
Man betrachte dagegen folgendes Beispiel:
Sei $H := L_2(\Omega,\mu,\ell_2(\mathbb{N},\mathbb{R}))$,sei $(e_n)_{n\geq 1}$ eine Orthonormalbasis von $\ell_2(\mathbb{N},\mathbb{R})$.Dann ist
$H = \{\sum_{n\geq 1} h_n \otimes e_n \mid h_n \in L_2(\Omega,\mu,\mathbb{R}), \sum_{n\geq 1}\|h_n\|^2 < \infty\}$.(siehe [Ta,IV§1])
Sei (Ω,μ) so gewählt,daß $L_\infty(\Omega,\mu,\mathbb{R})$ eine orthogonale Familie von Projektionen $(f_n)_{n\geq 1}$ enthält,sei $h = \sum_{n\geq 1} h_n \otimes e_n \in H$,
sei $T(h) := \sum_{n\geq 1}(f_n h_1)\otimes e_n$.
Dann ist $\|T(h)\|^2 = \sum_{n\geq 1}\|f_n h_1\|^2 = \|\sum_{n\geq 1}(f_n h_1)\|^2 = \|(\sum_{n\geq 1} f_n)h_1\|^2$
$\leq \|h_1\|^2 \leq \|h\|^2$,wobei die zweite Gleichheit aus der Orthogonalität von $(f_n h_1)_{n\geq 1}$ und die dritte daraus folgt,daß Summen orthogonaler Projektionen in der starken Operatortopologie konvergieren.
Sei F_n der zu f_n gehörende Multiplikationsoperator auf $L_2(\Omega,\mu,\mathbb{R})$ .Dann ist $T_{n1} = F_n, T_{nm} = 0$ für $m,n \in \mathbb{N}, m \neq 1$.
Also ist $T \in L_\infty(\Omega,\mu,\mathbb{R}) \bar{\otimes}_{\mathbb{R}} E_1$ gemäß der Bemerkung auf S.481 oben von [St1] ,aber es ist $\|T_{n1}\| = 1$ für alle $n \geq 1$.
Die Aussage von [St1,Th3] ist jedoch richtig:
Dazu ist zu zeigen (siehe den zweiten Teil des Beweises von [St1,Th3]),daß $L_\infty(\Omega,\mu,\mathbb{R}) \bar{\otimes}_{\mathbb{R}} E_1$ als Algebra,die auf dem Hilbertraum $L_2(\Omega,\mu,\ell_2(\Lambda,\mathbb{R}))$ operiert, $*$-isomorph zu $L^w_\infty(\Omega,\mu,E_1)$,mit den "punktweise" erklärten Operationen,ist.
Sei $z \mapsto \bar{z}$ die Konjugation des $\mathbb{C}$-Hilbertraums $\ell_2(\Lambda,\mathbb{C}) =: H$

bezüglich $\ell_2(\Lambda,\mathbb{R})$. Diese induziert eine Konjugation auf $L_2(\Omega,\mu,H)$ durch $f\otimes z\mapsto\overline{f\otimes z}:=\overline{f}\otimes\overline{z}$ für $f\in L_2(\Omega,\mu,\mathbb{C})z\in H$. Für einen $\mathbb{C}$-Hilbertraum K mit Konjugation definiere man auf $\mathcal{L}(K)$ eine Konjugation durch $\overline{x}(z):=\overline{x(\overline{z})}$ für $z\in K,x\in\mathcal{L}(K)$. $x\mapsto\overline{x}$ ist stetig bezüglich der ultraschwachen Operatortopologie.
$\{x\in\mathcal{L}(H)\,|\,x=\overline{x}\}$ kann mit E_1 und $A:=\{x\in\mathcal{L}(L_2(\Omega,\mu,H)\,|\,x=\overline{x}\}$ kann mit $\mathcal{L}(L_2(\Omega,\mu,\ell_2(\Lambda,\mathbb{R})))$ identifiziert werden.
Für $g\in L_\infty(\Omega,\mu,\mathbb{C}),x\in\mathcal{L}(H)$ ist $\overline{g\otimes_{\mathbb{C}}x}=\overline{g}\otimes_{\mathbb{C}}\overline{x}$. Unter Verwendung von konjugationsinvarianten (Hamel-) Basen von $L_\infty(\Omega,\mu,\mathbb{C})$ und $\mathcal{L}(H)$ sieht man dann, daß $A\cap(L_\infty(\Omega,\mu,\mathbb{C})\otimes_{\mathbb{C}}\mathcal{L}(H))$ $=L_\infty(\Omega,\mu,\mathbb{R})\otimes_{\mathbb{R}}E_1$. Durch Übergang zum Abschluß bezüglich der ultraschwachen Operatortopologie erhält man $B:=A\cap(L_\infty(\Omega,\mu,\mathbb{C})\,\overline{\otimes}_{\mathbb{C}}\,\mathcal{L}(H))=L_\infty(\Omega,\mu,\mathbb{R})\,\overline{\otimes}_{\mathbb{R}}\,E_1$.
Für $a\in\mathcal{L}^\infty_{op}(\Omega,\mu,\mathcal{L}(H))$ ist auch $\overline{a}:t\mapsto\overline{a(t)}\in\mathcal{L}^\infty_{op}(\Omega,\mu,\mathcal{L}(H))$ und es gilt $\int^{\oplus}_\Omega\overline{a}(t)\,d\mu(t)=\overline{\int^{\oplus}_\Omega a(t)\,d\mu(t)}$.
Wie in (6.11) definiert man auf $L^w_\infty(\Omega,\mu,\mathcal{L}(H))$ dann durch Repräsentanten aus $\mathcal{L}^\infty_{op}(\Omega,\mu,\mathcal{L}(H))$ eine Abbildung $y\mapsto\overline{y}$. Dann stimmt $D:=\{y\in L^w_\infty(\Omega,\mu,\mathcal{L}(H))\,|\,y=\overline{y}\}$ überein mit $L^w_\infty(\Omega,\mu,E_1)$.
Für $x\in L_\infty(\Omega,\mu,\mathbb{C})\,\overline{\otimes}\,\mathcal{L}(H)$ und die Abbildung j aus (6.9) ist wegen (6.10) und (6.8) $j(\overline{x})=\overline{j(x)}$. $j:B\to D$ liefert dann den gewünschten $*$-Isomorphismus. Qed

(6.13) Satz Ist C ein Cartan-Faktor, T ein lokalkompakter Raum mit positivem Radonmaß μ, so ist $L^\infty_w(T,\mu,C)$ mit dem (durch geeignete Repräsentanten) punktweise erklärten Tripelprodukt ein JBW*-Tripel mit Prädual $L^1(T,\mu,C_*)$.

Beweis: Ist C ein Cartan-Faktor vom Typ 1,2 oder 3, dann gibt es einen komplexen Hilbertraum H, so daß C Bild einer σ^*-stetigen Projektion auf $E:=\mathcal{L}(H)$ ist. Gemäß (6.7)(4) induziert p eine σ^*-stetige Projektion $\tilde{p}$ auf $L^\infty_w(E)$ mit Bild $L^\infty_w(C)$. Gemäß (6.11) wird $L^\infty_w(E)$ zu einer W*-Algebra. $L^\infty_w(C)$ ist $\tilde{s}^*$-abgeschlossen in $L^\infty_w(E)$ und ist abgeschlossen bezüglich des Tripelprodukts (2.4) wegen (6.9)(2), d.h. $L^\infty_w(C)$ ist

nach (3.6) ein JBW*-Tripel.
Ist C vom Typ 4,so kann C in E als 6^*-abgeschlossene Jordan -$*$- Unteralgebra eingebettet werden.Damit ist $L_w^\infty(C)$ nach (6.7)(3) und (6.9)(2) eine (norm-)abgeschlossene Jordan -$*$- Unteralgebra von $L_w^\infty(E)$ mit Prädual $L^1(C_*)$,d.h. $L_w^\infty(C)$ ist eine JBW*-Algebra und damit ein JBW*-Tripel.
C^6 ist eine endlich-dimensionale JBW*-Algebra, daher ist $L_w^\infty(C^6)$ ($= L^\infty \otimes C^6$) mit der punktweise erklärten Multiplikation und Involution eine JBW*-Algebra.
$L_w^\infty(C^5)$ ist ein 6^*-abgeschlossenes Untertripel von $L_w^\infty(C^6)$, also ein JBW*-Tripel. Qed

Bemerkung: Ist C ein Cartan-Faktor endlichen Ranges (vgl. [Ka3,(3.3)]),so ist C reflexiv und damit $L_w^\infty(T,\mu,C) = L^\infty(T,\mu,C)$.

(6.14) Lemma Sei C ein Cartan-Faktor,$U := L_w^\infty(T,\mu,C)$.
C sei auf natürliche Weise aufgefaßt als Untertripel von U.
Sei e ein Tripotent in C.
(1) Seien $C_k(e)$ ($k = 0,1/2,1$) die Peirce-k-Räume von e in C. Dann sind $L_w^\infty(T,\mu,C_k(e))$ die Peirce-k-Räume von e in U. Insbesondere ist e vollständig (unitär) in U genau dann, wenn es dies in C ist.
(2) Sei e minimal in C.Dann ist e abelsch in U.
(3) Ist $\mathcal{E} := (e_i)_{i\in I}$ eine orthogonale Familie von Tripotenten in C mit Peirce-Räumen C_{ij} ($i,j \in I\cup\{0\}$) bezüglich $\mathcal{E}$ in C,so sind $L_w^\infty(T,\mu,C_{ij})$ die Peirce-Räume bezüglich $\mathcal{E}$ in U. Insbesondere ist $\mathcal{E}$ vollständig in U genau dann,wenn $\mathcal{E}$ vollständig in C ist.

Beweis: (1) Seien p_k die Peirce-k-Projektionen von e in C. Wegen der mit geeigneten Repräsentanten punktweisen Definition des Produkts in U und der Darstellung der Peirce-Projektionen als Polynome in $e \square e^*$(1.14) sind dann die gemäß (6.7)(4) gebildeten Projektionen $\tilde{p}_k$ die Peirce-k-Projektio-

nen von e in U.Es ist $\widetilde{P_k}(U) = L_w^\infty(T,\mu,C_k(e))$.
(2) Nach (1) ist $U_1(e) = L^\infty(T,\mu,\mathbb{C}e)$.
(3) Nach (3.15) ist $e := \sum_{i\in I} e_i$ ein Tripotent in C.(Summation bezüglich σ^*,man beachte (6.7)(1).) Nach (3.17) gibt es zu $i,j \in I\cup\{0\}$ auf C eine natürliche σ^*-stetige Projektion p_{ij} mit $p_{ij}(C) = C_{ij}$ und $p_{ij} = p_k^f p_l^g$ für geeignete $f,g \in \mathcal{E}\cup\{e\}$ und $k,l \in \{0,1/2,1\}$.Nach (6.7)(4) ist dann $\widetilde{p_{ij}} = \widetilde{p_k^f}\,\widetilde{p_l^g}$ eine σ^*-stetige Projektion auf U mit $\widetilde{p_{ij}}(U) = L_w^\infty(T,\mu,C_{ij})$, und nach dem Beweis von (1) und (3.17) bildet $\widetilde{p_{ij}}$ U auf den Peirce-Raum U_{ij} ab. Qed

(6.15) Korollar Ist C ein Cartan-Faktor,so ist $U := L_w^\infty(T,\mu,C)$ ein JBW*-Tripel vom Typ I.

Beweis: Sei e ein in C minimales Tripotent.Nach (6.14)(2) ist e abelsch in U.Das von e in U erzeugte σ^*-abgeschlossene Ideal U(e) enthält C,da C ein JBW*-Tripelfaktor ist. Somit enthält U(e) auch ein in C vollständiges Tripotent f. Nach (6.14)(1) ist f vollständig in U,daher ist U = U(e) = = U(f). Qed

(6.16) Korollar Ist A ein JBW*-Algebra-Faktor vom Typ I, A_{sa} der selbstadjungierte Teil von A,so ist $L_w^\infty(T,\mu,A)$ mit den (durch geeignete Repräsentanten) punktweise erklärten Operationen eine JBW*-Algebra vom Typ I mit selbstadjungierten Teil $L_w^\infty(T,\mu,A_{sa})$.

Beweis: Mit dem Tripelprodukt (1.11) ist A ein Cartan-Faktor (siehe (6.6)).Wie in (6.13) lassen sich daher mit geeigneten Repräsentanten punktweise Produkt und Involution erklären,mit denen $L_w^\infty(T,\mu,A)$ zu einer JBW*-Algebra wird. Mit (6.14) zeigt man wie in (6.15),daß $L_w^\infty(T,\mu,A)$ vom Typ I ist.Da die Involution punktweise erklärt ist,ist $L_w^\infty(T,\mu,A_{sa})$ der selbstadjungierte Teil von $L_w^\infty(T,\mu,A)$. Qed

nach (3.6) ein JBW*-Tripel.
Ist C vom Typ 4,so kann C in E als σ^*-abgeschlossene Jordan -*- Unteralgebra eingebettet werden.Damit ist $L_w^\infty(C)$ nach (6.7)(3) und (6.9)(2) eine (norm-)abgeschlossene Jordan -*- Unteralgebra von $L_w^\infty(E)$ mit Prädual $L^1(C_*)$,d.h. $L_w^\infty(C)$ ist eine JBW*-Algebra und damit ein JBW*-Tripel.
C^6 ist eine endlich-dimensionale JBW*-Algebra, daher ist $L_w^\infty(C^6)$ ($= L^\infty \boxtimes C^6$) mit der punktweise erklärten Multiplikation und Involution eine JBW*-Algebra.
$L_w^\infty(C^5)$ ist ein σ^*-abgeschlossenes Untertripel von $L_w^\infty(C^6)$, also ein JBW*-Tripel. Qed

Bemerkung: Ist C ein Cartan-Faktor endlichen Ranges (vgl. [Ka3,(3.3)]),so ist C reflexiv und damit $L_w^\infty(T,\mu,C) = L^\infty(T,\mu,C)$.

(6.14) Lemma Sei C ein Cartan-Faktor,$U := L_w^\infty(T,\mu,C)$.
C sei auf natürliche Weise aufgefaßt als Untertripel von U.
Sei e ein Tripotent in C.
(1) Seien $C_k(e)$ ($k = 0,1/2,1$) die Peirce-k-Räume von e in C. Dann sind $L_w^\infty(T,\mu,C_k(e))$ die Peirce-k-Räume von e in U. Insbesondere ist e vollständig (unitär) in U genau dann, wenn es dies in C ist.
(2) Sei e minimal in C.Dann ist e abelsch in U.
(3) Ist $\mathcal{E} := (e_i)_{i\in I}$ eine orthogonale Familie von Tripotenten in C mit Peirce-Räumen C_{ij} ($i,j \in I\cup\{0\}$) bezüglich $\mathcal{E}$ in C,so sind $L_w^\infty(T,\mu,C_{ij})$ die Peirce-Räume bezüglich $\mathcal{E}$ in U. Insbesondere ist $\mathcal{E}$ vollständig in U genau dann,wenn $\mathcal{E}$ vollständig in C ist.

Beweis: (1) Seien p_k die Peirce-k-Projektionen von e in C. Wegen der mit geeigneten Repräsentanten punktweisen Definition des Produkts in U und der Darstellung der Peirce-Projektionen als Polynome in $e \square e^*$(1.14) sind dann die gemäß (6.7)(4) gebildeten Projektionen $\tilde{p}_k$ die Peirce-k-Projektio-

nen von e in U.Es ist $\widetilde{p}_k(U) = L_w^\infty(T,\mu,C_k(e))$.
(2) Nach (1) ist $U_1(e) = L^\infty(T,\mu,\mathbb{C}e)$.
(3) Nach (3.15) ist $e := \sum_{i\in I} e_i$ ein Tripotent in C.(Summation bezüglich σ^*,man beachte (6.7)(1).) Nach (3.17) gibt es zu $i,j \in I\cup\{0\}$ auf C eine natürliche σ^*-stetige Projektion p_{ij} mit $p_{ij}(C) = C_{ij}$ und $p_{ij} = p_k^f\, p_l^g$ für geeignete $f,g \in \mathcal{E}\cup\{e\}$ und $k,l \in \{0,1/2,1\}$.Nach (6.7)(4) ist dann $\widetilde{p}_{ij} = \widetilde{p_k^f}\,\widetilde{p_l^g}$ eine σ^*-stetige Projektion auf U mit $\widetilde{p}_{ij}(U) = L_w^\infty(T,\mu,C_{ij})$, und nach dem Beweis von (1) und (3.17) bildet $\widetilde{p}_{ij}$ U auf den Peirce-Raum U_{ij} ab. Qed

(6.15) Korollar Ist C ein Cartan-Faktor,so ist $U := L_w^\infty(T,\mu,C)$ ein JBW*-Tripel vom Typ I.

Beweis: Sei e ein in C minimales Tripotent.Nach (6.14)(2) ist e abelsch in U.Das von e in U erzeugte σ^*-abgeschlossene Ideal U(e) enthält C,da C ein JBW*-Tripelfaktor ist. Somit enthält U(e) auch ein in C vollständiges Tripotent f. Nach (6.14)(1) ist f vollständig in U,daher ist $U = U(e) = U(f)$. Qed

(6.16) Korollar Ist A ein JBW*-Algebra-Faktor vom Typ I, A_{sa} der selbstadjungierte Teil von A,so ist $L_w^\infty(T,\mu,A)$ mit den (durch geeignete Repräsentanten) punktweise erklärten Operationen eine JBW*-Algebra vom Typ I mit selbstadjungierten Teil $L_w^\infty(T,\mu,A_{sa})$.

Beweis: Mit dem Tripelprodukt (1.11) ist A ein Cartan-Faktor (siehe (6.6)).Wie in (6.13) lassen sich daher mit geeigneten Repräsentanten punktweise Produkt und Involution erklären,mit denen $L_w^\infty(T,\mu,A)$ zu einer JBW*-Algebra wird. Mit (6.14) zeigt man wie in (6.15),daß $L_w^\infty(T,\mu,A)$ vom Typ I ist.Da die Involution punktweise erklärt ist,ist $L_w^\infty(T,\mu,A_{sa})$ der selbstadjungierte Teil von $L_w^\infty(T,\mu,A)$. Qed

Die im dritten Teil von §6 vorgestellten Beispiele sind JBW*-Algebren vom Typ I.
Es sei zunächst an folgende bekannte Tatsachen erinnert:

(6.17) Sei n eine Kardinalzahl. Eine JBW -Algebra A heißt vom Typ I_n, wenn es eine orthogonale Familie $(e_i)_{i\in I}$ abelscher Projektionen in A mit zentralem Träger 1 gibt, so daß $\sum_{i\in I} e_i = 1$ (Summation bezüglich σ^*) und card I = n ist. n ist dann eindeutig bestimmt. (siehe z.B. [H,5.3.3])
e_i und e_j $(i \neq j)$ sind stark verbunden, d.h. es gibt ein $x \in \{e_i A^* e_j\}$ mit $x^2 = e_i + e_j$.
Eine JW-Algebra [To] ist "homogeneous" im Sinne von [To§15] genau dann, wenn sie vom Typ I_n für ein geeignetes n ist. (Für die beiden letzten Aussagen siehe [H,5.3.2(ii) und5.2.8])
Eine JBW*-Algebra heißt vom Typ I_n, wenn ihr selbstadjungierter Teil vom Typ I_n ist.
Eine in der ultraschwachen Operatortopologie abgeschlossene Jordan -*- Algebra von Operatoren auf einem komplexen Hilbertraum heißt eine JW*-Algebra. Die JW*-Algebren sind gerade die Komplexifizierungen der JW-Algebren.

(6.18) Jede JBW -Algebra (und damit jede JBW*-Algebra nach [E,4.3]) A besitzt eine eindeutige Zerlegung in eine direkte Summe von σ^*-abgeschlossenen Idealen $A = \bigoplus_{n\in N}^{\infty} A_n \oplus^{\infty} A_{ex}$, wobei N eine Menge von Kardinalzahlen ist, so daß A_o keine abelsche Projektion enthält, A_n $(n \geq 1)$ (*-) isomorph zu einer JW- (JW*-)Algebra vom Typ I_n ist und A_{ex} rein exzeptionell ist. A_{ex} ist vom Typ I_3.
[Sh,Th3.9], [To,Th5,Th6,Th16]

Die Zerlegung (6.18) besitzt folgende Verfeinerung, die wir hier nur für den komplexen Fall formulieren wollen:
T, T_k (k eine Kardinalzahl) bezeichnen einen lokalkompakten Raum mit positivem Radonmaß μ, μ_k.

(6.19) A_1 ist nach Definition eine assoziative JBW*-Algebra, also eine kommutative W*-Algebra und somit $*$-isomorph zu $L^\infty(T,\mu)$ für geeignete T,μ.

(6.20) Def Eine JBW*-Algebra B heiße vom Typ $I_{2,k}$ (k eine Kardinalzahl größer als 1), wenn B $*$-isomorph ist zu $L^\infty(T,\mu,A^4_{k+1})$ für geeignete T,μ.

(6.21) Für A_2 gibt es eine Zerlegung in σ^*-abgeschlossene Ideale $A_2 = \bigoplus_{k\in K}^\infty A_{2,k}$, wobei K eine Menge von Kardinalzahlen größer als 1 und $A_{2,k}$ vom Typ $I_{2,k}$ ist. [St2,Th2]

(6.22) Für A_n $(n \geq 3)$ gibt es eine Zerlegung in σ^*-abgeschlossene Ideale $A_n = \bigoplus_{k=1,2,3}^\infty A_{n,k}$, wobei $A_{n,k}$ $*$-isomorph ist zu $L^\infty_w(T_k,\mu_k,A^k_n)$ für geeignete T_k,μ_k und JBW*-Algebra-Faktoren A^k_n vom rechteckigen, antisymmetrischen und symmetrischen Typ. [St1,Th3]

(6.23) $(A_{ex})_{sa}$ ist isomorph zu $\mathcal{C}(X,\mathcal{H}_3(\mathcal{D}_{\mathbb{R}}))$ für einen hyperstoneschen Raum X [Sh,Th3.9].

Daher ist A_{ex} $*$-isomorph zu $L^\infty(T,\mu,A^6)$, wobei A^6 der JBW*-Ausnahme-Faktor ist und T,μ so gewählt sind, daß $L^\infty(T,\mu)$ $*$-isomorph zu $\mathcal{C}(X)$ ist.

(6.24) Lemma Sei H ein Hilbertraum mit Orthonormalbasis $(e_i)_{i\in I}$, T ein lokalkompakter Raum mit positivem Radonmaß μ, $f \in L^\infty(T,\mu,H)$.

Dann hat f eine eindeutige Darstellung $f = \sum_{i\in I} f_i \otimes e_i$, wobei $f_i \in L^\infty(T,\mu)$ für alle $i \in I$ ist und die Summe bezüglich $\mathfrak{T}(L^\infty(T,\mu,H),L^1(T,\mu,H))$ konvergiert. Insbesondere ist $f = 0$ genau dann, wenn $f_i = 0$ für alle $i \in I$ ist.

Beweis: Es ist $L^\infty(T,\mu,H) = L^\infty_w(T,\mu,H)$. Sei $p_i : z \mapsto (z|e_i)e_i : H \to H$, sei $\tilde{p}_i$ die zugehörige Projektion auf $L^\infty_w(T,\mu,H)$ gemäß (6.7)(4) und sei $g \in \mathcal{L}^\infty_w(T,\mu,H)$.

Dann besitzt g eine eindeutige Darstellung $g(t) = \sum_{i\in I} g_i(t)e_i$ $(t \in T)$ mit $g_i \in \mathcal{L}^\infty(T,\mu)$ und $\tilde{p}_i([g]) = [g_i \otimes e_i]$.

Sei $z = \sum_{i\in I} z_i e_i \in H$. Ist g_i lokal μ-fast überall gleich Null für alle $i \in I$, so ist auch $t \mapsto (g(t)|z): T \to \mathbb{C}$ lokal μ-fast überall gleich Null, da nur für abzählbar viele $i \in I$ z_i von Null verschieden ist. g ist daher schwach μ-fast überall gleich Null.
Also ist die Familie $(\tilde{p}_i)_{i\in I}$ treu, und die endlichen Summen der $\tilde{p}_i$ $(i\in I)$ erfüllen die Voraussetzungen von (4.4). Daraus folgt die Behauptung. Qed

Wir benötigen im folgenden noch einige weitere Eigenschaften der JBW*-Algebren vom Typ I_2:

(6.25) Ein Element s einer unitalen Jordan - $*$ - Algebra $(A, \circ)$ heißt Symmetrie, wenn $s = s^*$ und $s^2 = 1$ ist. Zwei Symmetrien $s,t \in A$ heißen orthogonal, wenn $s \circ t = 0$ ist (vgl. [St2]).
In [St2, S.116] wird definiert: Eine Symmetrie $s \in A$ heiße "proper", wenn für jede Faktordarstellung $\Phi \neq 0$ von A $\Phi(s) \notin \{1,-1\}$ gilt. Symmetrien in einer orthogonalen Familie mit mehr als einem Element sind proper: Sind $s,t \in A$ orthogonale Symmetrien, so ist der lineare Aufspann B von 1, s, und t eine zu A_2^3 - den symmetrischen 2x2 - Matrizen über $\mathbb{C}$ - isomorphe, daher einfache Unteralgebra von A. Die Einschränkung auf B einer Darstellung $\Phi \neq 0$ von A ist injektiv, insbesondere ist $\{\Phi(s), \Phi(t)\} \cap \{1,-1\} = \emptyset$. Der Zusatz "proper" ist daher in den Formulierungen der Lemmata 1 und 7 von [St2] überflüssig.

Nach der Definition des komplexen Spinfaktors A_{n+1}^4 (siehe (6.6), "Typ 4" und [H, 6.1.2, 6.1.3]) existiert in A_{n+1}^4 eine (maximale) orthogonale Familie von n Symmetrien $\mathcal{S} = (s_i)_{i\in I}$, so daß der von $\mathcal{S}$ aufgespannte abgeschlossene Unterraum U ein Hilbertraum mit Orthonormalbasis $\mathcal{S}$ und $A_{n+1}^4 = \mathbb{C}1 \oplus^1 U$ ist.

(6.26) Lemma $\mathcal{S}$ ist eine in $A := L^\infty(T,\mu,A^4_{n+1})$ zentral-maximale orthogonale Familie von Symmetrien (wobei T ein lokalkompakter Raum mit positivem Radonmaß μ ist).

Beweis: Sei z eine zentrale Projektion in A. $z\circ\mathcal{S}$ ist offenbar eine orthogonale Familie von Symmetrien in $z\circ A$. Sei $0 \neq f = z\circ f \in z\circ A$. Nach (6.24) ist $f = \sum_{i\in I} f_i \otimes s_i + f_o \otimes 1$ für $f_i \in L^\infty(T,\mu)$ $(i \in I \dot\cup \{0\})$, wobei die Summe bezüglich σ^* konvergiert.
Es ist $f\circ s_j = f_j \otimes 1 + f_o \otimes s_j \neq 0$ für ein $j \in I$, somit auch $f\circ z\circ s_j (= f\circ s_j) \neq 0$.
Insbesondere gibt es dann in $z\circ A$ keine zu $z\circ\mathcal{S}$ orthogonale Symmetrie. Qed

(6.27) Umgekehrt ist jede JBW*-Algebra vom Typ I_2, die eine zentral-maximale orthogonale Familie von n Symmetrien enthält (n größer als 1), vom Typ $I_{2,n}$. [St1.Th1]

(6.28) Lemma Seien A_i $(i = 1,2)$ zueinander $*$-isomorphe JBW*-Algebren vom Typ I_{2,k_i}, sei $\min(k_1,k_2) < \infty$. Dann ist $k_1 = k_2$.

Beweis: Sei oBdA $k_1 \leq k_2$, sei $\Phi: A_2 \to A_1$ ein $*$-Isomorphismus. Nach [H,6.3.11] hat jede Faktordarstellung einer JBW*-Algebra vom Typ $I_{2,k}$ $(k < \infty)$ als Bild den Spinfaktor A^4_{k+1}.
Sei $0 \neq \varphi$ eine Faktordarstellung von A_1 in $A^4_{k_1+1}$.
(Eine solche existiert für jede JBW*-Algebra nach [A2,5.7].)
A_2 enthält nach (6.26) eine orthogonale Familie $\mathcal{S}$ von k_2 Symmetrien. $\varphi\circ\Phi(\mathcal{S})$ ist dann eine orthogonale Familie von k_2 Symmetrien in $A^4_{k_1+1}$, woraus aus Dimensionsgründen $k_2 \leq k_1$ folgt. Qed

(6.29) Lemma Sei A eine JBW*-Algebra vom Typ $I_{2,k}$ (k keine Kardinalzahl), seien $m,n \in \mathbb{N}$, $1 < m \leq n \leq k$, sei $\mathcal{S} = (s_i)_{1\leq i\leq m}$ eine orthogonale Familie von m Symmetrien in A.

Dann läßt sich $\mathcal{F}$ zu einer orthogonalen Familie $(s_i)_{1 \leq i \leq n}$ von n Symmetrien in A ergänzen.

Beweis: Sei $\mathcal{T} = (s_i)_{i \in I}$ eine maximale orthogonale Familie von Symmetrien in A, die $\mathcal{F}$ enthält. Angenommen, es sei card $I < n$. Dann ist $\mathcal{T}$ nicht zentral-maximal ((6.27) und (6.28)). Sei $(z_j)_{j \in J}$ eine maximale orthogonale Familie von zentralen Projektionen in A, so daß $(zs_i)_{i \in I}$ nicht maximal ist. Da für jede zentrale Projektion z in A auch zA vom Typ $I_{2,k}$ ist, folgt $\sum_{j \in J} z_j = 1$. Man wähle Symmetrien t_j in $z_j A$, so daß t_j zu $z_j s_i$ für alle $i \in I$ orthogonal ist. Dann ist $t := \sum_{j \in J} t_j$ (Summation bezüglich $\mathfrak{S}^*$) eine zu s_i für alle $i \in I$ orthogonale Symmetrie in A im Widerspruch zur Maximalität von $\mathcal{T}$. Qed

§ 7 Rein alternative W^*-Algebren

(7.1) Eine alternative C^*-Algebra A [Br2,(2.3)] heißt eine alternative W^*-Algebra, wenn A (als Banachraum) einen Prädual besitzt.
Eine alternative Algebra A heißt rein alternativ, wenn sie kein von Null verschiedenes, zweiseitiges, im Nukleus von A [Scha,S.13] enthaltenes Ideal besitzt.
Ein Beispiel für eine rein alternative Algebra ist die komplexe Cayley-Algebra $\mathbb{O}$ (6.4).
Auf $\mathbb{O}$ gibt es eine eindeutige Norm, mit der $\mathbb{O}$ zu einer alternativen C^*-Algebra wird, der Standard-C^*-Cayley-Algebra. [Br2,(3.7)]

In [P,6.10] wird gezeigt: Eine rein alternative C^*-Algebra ist $*$-isomorph zu einer Unteralgebra von $\mathcal{C}(X, \mathbb{O})$ (mit der Supremumsnorm und den punktweise erklärten Operationen) für einen kompakten topologischen Raum X und die Standard-C^*-Cayley-Algebra $\mathbb{O}$.
In §9.3 benötigen wir folgende Verschärfung dieses Resultats für alternative W^*-Algebren:

(7.2) Satz Eine rein alternative W^*-Algebra A ist isometrisch $*$-isomorph zu $\mathcal{C}(X, \mathbb{O})$ für einen hyperstoneschen Raum X.

Der Beweis gliedert sich in mehrere Schritte:
A^J bezeichne die Jordanifizierung von A [Br2,(1.2)], es sei $x \circ y := 1/2(xy + yx)$ für $x, y \in A$.

(7.3) Lemma A^J ist $*$-isomorph zu $\mathcal{C}(X, \mathbb{O}^J)$ für einen hyperstoneschen Raum X.

Beweis: A ist unital [P,3.3]. A^J ist eine JBW^*-Algebra [Br2,(2.14)]. Sei $A^J = \bigoplus_{n \in N}^{\infty} A_n^J$ die Zerlegung von A^J in Ideale

vom Typ I_n gemäß (6.18).Nach [E,4.3] gibt es eine orthogonale Familie $(z_n)_{n\in N}$ zentraler Projektionen in A^J mit $A_n^J = z_n \circ A^J$.Die Zentren von A und A^J stimmen überein [Br1,(4.24)],daher ist $A_n := z_n A$ ein $*$-abgeschlossenes,zweiseitiges $*$-Ideal in A.A_n ist wieder eine rein alternative W^*-Algebra.
Da A_1^J assoziativ ist,folgt $A_1 = 0$.
Nach [P,6.9] gibt es zu jedem $n\in N$ eine Darstellung φ_n von A_n auf $\mathbb{O}$.φ_n ist eine Darstellung von A_n^J auf $\mathbb{O}^J$.A_n^J $(n\geq 2)$ enthält nach (6.17) n paarweise stark verbundene,orthogonale Projektionen $(e_{ni})_{i\in I_n}$ mit $\sum_{i\in I_n} e_{ni} = z_n$;A_o^J enthält nach dem Halbierungslemma [H,5.2.15] vier paarweise stark verbundene, orthogonale Projektionen $e_{o1},\ldots,e_{o4}$ mit $e_{o1}+\ldots+e_{o4} = z_o$. $(\varphi_n(e_{ni}))_{i\in I_n}$ (für $n\geq 2$) bzw. $(\varphi_o(e_{oi}))_{i=1,\ldots,4}$ sind dann n (für $n\geq 2$) bzw. 4 (für $n = 0$) paarweise stark verbundene, orthogonale Projektionen in $\mathbb{O}^J$ - ein Widerspruch für $n \neq 2$, da $\mathbb{O}^J$ ein JBW^*-Faktor vom Typ I_2 ist [Br2,(3.15)].
Daher ist $A^J = A_2^J$ eine JBW^*-Algebra vom Typ I_2.
Sei nun $A^J = \oplus^{\infty}_{k\in K} A^J_{2,k}$ eine Zerlegung von A_2^J gemäß (6.21). Sei für $k\in K$ p_k eine zentrale Projektion in A_2 mit $p_k \circ A_2^J = A^J_{2,k}$,sei $A_{2,k} := p_k A_2$.Für $k\in K$ gibt es dann nach (6.26) eine orthogonale Familie $(s_{ki})_{i\in I_k}$ von k Symmetrien in $A^J_{2,k}$ sowie eine Darstellung ψ_k von $A_{2,k}$ auf $\mathbb{O}$ [P,6.9].Dann ist $(\psi_k(s_{ki}))_{i\in I_k}$ eine orthogonale Familie von k Symmetrien in $\mathbb{O}$,woraus aus Dimensionsgründen $k < \infty$ folgt.
Mit [H,6.3.11] folgt $k = 7$,und damit ist A $*$-isomorph zu $\mathcal{C}(X, \mathbb{O}^J)$ für einen hyperstoneschen Raum X [H,6.3.13] . Qed

(7.4) Lemma Sei A eine komplexe,unitale,alternative Algebra mit Involution,seien s,t orthogonale Symmetrien in A^J. Dann ist $r := i(st)$ eine zu s und t orthogonale Symmetrie in A^J.

Beweis: Es werden die Moufang-Identitäten [Scha,III1] benützt: $r^2 = -(st)(st) = (st)(ts) = st^2s = 1$.
$(st)s = -(ts)s = -ts^2 = -t, s(st) = s^2t = t$, daher $s \circ r = 0$.
Genauso folgt $t \circ r = 0$. Qed

(7.5) Lemma Sei A eine rein alternative W^*-Algebra. Dann enthält A in A^J paarweise orthogonale Symmetrien s,t,u mit $(st) \circ u = 0$.

Beweis: Nach (7.3) gibt es in A^J orthogonale Symmetrien s,t. Sei $r := i(st)$. Da $\mathbb{O}^J$ ein komplexer Spinfaktor der Dimension acht ist [Br2,(3.15)], ist A^J vom Typ $I_{2,7}$, und (r,s,t) kann daher nach (6.29) zu einer orthogonalen Familie von Symmetrien (r,s,t,u) ergänzt werden. Insbesondere ist $u \circ r = i(u \circ (st)) = 0$. Qed

(7.6) Lemma Sei A eine komplexe, unitale, alternative Algebra mit Involution, seien s,t,u paarweise orthogonale Symmetrien in A^J mit $(st) \circ u = 0$. Dann ist die von $\{1,s,t,u\}$ in A erzeugte (alternative) Unteralgebra zu $\mathbb{O}$ $*$-isomorph und unter der Involution invariant.

Beweis: Sind $s_1, \ldots, s_n$ paarweise orthogonale Symmetrien in A^J, so ist $\{1, s_1, \ldots, s_n\}$ linear unabhängig.

(7.7) Beh.: Seien s_1, s_2, s_3 paarweise orthogonale Symmetrien in A^J, sei Σ_3 die Permutationsgruppe in drei Ziffern. Dann gilt für alle $\sigma \in \Sigma_3$: $s_1(s_2s_3) = \operatorname{sgn}\sigma \, s_{\sigma(1)}(s_{\sigma(2)}s_{\sigma(3)})$.

Beweis von (7.7): Wegen $s_is_j = -s_js_i$ für $i \neq j$ ist nur zu zeigen: $s_1(s_2s_3) = -s_2(s_1s_3)$. Es ist $s_1(s_1(s_2s_3)) = s_1^2(s_2s_3) = s_2s_3$ und $s_1(s_2(s_1s_3)) = (s_1s_2s_1)s_3 = -(s_1^2s_2)s_3 = -s_2s_3$ (Moufang-Identitäten). Die Linksmultiplikation mit einer Symmetrie ist invertierbar.

(7.8) Beh.: Seien s_1, s_2 orthogonale Symmetrien in A^J. Dann bildet $\{1, is_1, is_2, s_2s_1\}$ die kanonische Basis einer zu $\mathbb{H}$, den komplexen Quaternionen, $*$-isomorphen, involutionsinvarianten Unteralgebra.

Beweis von (7.8): Mit (7.4) und (7.7).
Man definiere nun: $e_0 := 1, e_1 := is, e_2 := it, e_3 := ts, e_4 := iu,$
$e_5 := us, e_6 := tu, e_7 := is(tu)$.
$\{e_0,\dots,e_7\}$ ist die Standard-Basis einer zu $\mathbb{C}$ $*$-isomorphen, involutionsinvarianten Unteralgebra: Es werden (6.4),(7.7), (7.8) und die Moufang-Identitäten benützt.
(7.9) Aus $u(st) = -(st)u$ folgt mit (7.7) $u(st) = -(us)t$, daher $e_7^2 = -(s(tu))(s(tu)) = ((tu)s)(s(tu)) = (tu)s^2(tu) = -ut^2u = -1$.
$e_j^2 = -1$ $(1 \leq j \leq 6)$ folgt mit (7.8), also gilt die erste Hälfte von (6.4)(ii).
Aus (7.8) folgt weiter: $e_1e_2 = e_3 = -e_2e_1, e_1e_4 = e_5 = -e_4e_1,$
$e_6e_4 = e_2 = -e_4e_6$.
Mit (7.9) und (7.7) folgt: $e_3e_4 = i(ts)u = is(tu) = e_7 = -e_4e_3$.
$e_1e_6 = e_7 = -i(tu)s = -e_6e_1$.
$e_2e_5 = it(us) = e_7 = -e_5e_2$.
$e_3e_5 = (ts)(us) = -(st)(us) = -s(tu)s = ((tu)s)s = tu = e_6 = \dots = -e_5e_3$. Also gilt (6.4)(iii).
Es ist $e_j \circ e_k = 0$ für $1 \leq j,k \leq 7$: Da ie_j, ie_k Symmetrien sind, folgt dies nach den obigen Gleichungen und (7.4), womit der Rest von (6.4)(ii) gezeigt ist.
Insbesondere ist also $\{e_0,\dots,e_7\}$ linear unabhängig.
(6.4)(iv) folgt damit aus (7.7).
Schließlich gilt $e_j^* = -e_j$ $(1 \leq j \leq 7)$.
Daher ist der lineare Aufspann von $\{e_0,\dots,e_7\}$ eine zu $\mathbb{C}$ $*$-isomorphe, involutionsinvariante Unteralgebra von A. Qed

Beweis von (7.2): Nach (7.5) und (7.6) enthält A eine zu $\mathbb{C}$ $*$-isomorphe, involutionsinvariante Unteralgebra B mit $1_B = 1_A$. Dann ist nach [Ja1,Th1] $A = Z \otimes B = \{\sum_{i=1}^{n} z_i b_i \mid n \in \mathbb{N}, z_i \in Z, b_i \in B\}$, wo Z das Zentrum von A ist. Als Zentrum einer alternativen W^*-Algebra ist Z $*$-isomorph zu $\mathcal{C}(X)$ für einen hyperstoneschen Raum X. Weil B endlichdimensional ist, ist dann A isomorph zu $\mathcal{C}(X,\mathbb{O})$.

Die Involution auf A geht dabei in die Involution auf $\mathcal{C}(X, \mathcal{O})$ über. A und $\mathcal{C}(X, \mathcal{O})$ sind also algebraisch $*$-isomorph und daher isometrisch isomorph [P,2.1]. Qed

(7.10) Bemerkung: Zu je zwei orthogonalen Symmetrien s,t in A^J kann ein $*$-Isomorphismus φ von A auf $\mathcal{C}(X, \mathcal{O})$ so gewählt werden, daß $\{\varphi(s), \varphi(t)\} \subset \mathcal{O}$ ist, wie aus dem Beweis von (7.2) unmittelbar ersichtlich ist.

§ 8 Koordinatisierungssätze

Ist $M_n(A)$ die Algebra der nxn - Matrizen über einer unitalen assoziativen Algebra A,so ist die Struktur von $M_n(A)$ vollständig bestimmt durch diejenige von A und diejenige des "Gitters" der natürlichen Matrixeinheiten $E_{ij} := (\delta_{ik}\delta_{jl})_{1\leq k,l\leq n}$ $(1\leq i,j\leq n)$.
Analog ermöglicht die Existenz ausgezeichneter Familien von Tripotenten,der Gitter,die Bestimmung der Struktur von Jordan-Tripelsystemen.Dies leisten die Koordinatisierungssätze von [Mc],[N] für endlich-dimensionale Jordan-Tripelsysteme.Zusammen mit dem Fortsetzungssatz (4.5) kann man aus ihnen Koordinatisierungssätze für JBW*-Tripel vom Typ I gewinnen.
Im folgenden werden Gitter und Koordinatisierungssätze für den rechteckigen und den antisymmetrischen Typ diskutiert.

§8.1 Der rechteckige Typ

Sei im folgenden immer U ein Jordan - *- Tripel.
Wir führen zunächst folgenden,sehr nützlichen Begriff ein:

(8.1.1) Def [Mc] Ein Quadrupel (e_1,e_2,e_3,e_4) von Tripotenten in U heiße ein Viereck,wenn
$e_i \top e_{i+1}$, $e_i \perp e_{i+2}$ und $2\{e_i e_{i+1}^* e_{i+2}\} = e_{i+3}$ für i=1,...,4 (Indizes mod 4) gilt.

(8.1.2) Ein Viereck geht offenbar bei zyklischer Vertauschung der Elemente in ein Viereck über.Ferner ist mit (e_1,e_2,e_3,e_4) auch (e_3,e_2,e_1,e_4) ein Viereck.

(8.1.3) Lemma Seien e,f,g Tripotente in U mit $e \top f$, $f \top g$ und $e \perp g$.Dann ist $(e,f,g,2\{ef^*g\})$ ein Viereck in U.

Beweis: Sei $h := 2\{ef^*g\}$. Nach [Mc,1.1] gibt es einen involutorischen Automorphismus T von U mit $Te = f$ und $Tg = -h$. Daher ist h ein Tripotent. Aus $e \perp g$ folgt $f \perp -h$, d.h. $f \perp h$. Aus $f \top g$ folgt $e \top h$. Nach [Mc,1.1] gibt es ferner einen involutorischen Automorphismus S von U mit $Sf = g$, $Se = -h$, woraus $g \top h$ folgt. Durch Anwendung von S, T und ST auf die Gleichung $h = 2\{ef^*g\}$ folgt der Rest der Behauptung. Qed

(8.1.4) Def (1)([Mc],[N]). Eine Familie $\mathcal{E} := (e_{ij})_{j\in J}^{i\in I}$ von Tripotenten in U heiße ein rechteckiges Gitter, wenn für alle $i,k \in I, j,l \in J$ gilt:

(i) $e_{ij} \top e_{il}$, $e_{ij} \top e_{kj}$ für $i \neq k, j \neq l$,

(ii) $e_{ij} \perp e_{kl}$ für $i \neq k$ und $j \neq l$,

(iii) $(e_{ij}, e_{il}, e_{kl}, e_{kj})$ ist für $i \neq k$ und $j \neq l$ ein Viereck,

(iv) Produkte von Elementen aus $\mathcal{E}$, die nicht durch (i), (ii) und (iii) bestimmt sind, verschwinden.

(2) $\mathcal{E}$ heiße überdeckend, wenn $U = \bigoplus_{i\in I, j\in J} U_1(e_{ij})$ ist.

(3) $\mathcal{E}$ heiße vollständig, wenn die Familie $(p_1^{ij})_{j\in J}^{i\in I}$ der Peirce-1-Projektionen von e_{ij} $(i\in I, j\in J)$ treu (s.(4.2)) ist.

(8.1.5) Bemerkungen: (1) (iv) folgt aus (i) - (iii), was man durch Fallunterscheidung bezüglich der Indexpaare und Anwendung von (1.13) nachprüft.

Ist $\operatorname{card} I \neq 1 \neq \operatorname{card} J$, so ist die Bedingung (iii) nicht leer, und (i) und (ii) sind damit in (iii) enthalten.

(2) Aus $e \perp f$ für Tripotente e,f in U folgt $U_1(e) \subset U_0(f)$ (mit (1.13)).

(3) Sei $\mathcal{E}$ wie in (8.1.4), $I' \subset I$, $J' \subset J$. Dann ist $U_{I',J'} := \bigoplus_{i\in I', j\in J'} U_1(e_{ij})$ ein Untertripel von U, was man wiederum durch Fallunterscheidung bezüglich der Indexpaare und Anwendung von (1.13) nachprüft.

(4) Offenbar ist jedes überdeckende rechteckige Gitter $\mathcal{E}$ vollständig. Ist $\mathcal{E}$ endlich, so gilt auch die Umkehrung:

Sei $k = (k_{ij})_{\substack{i\in I\\ j\in J}} \in \{0,1/2,1\}^{IxJ} =: K$, $U_{(k)} := \bigcap_{i\in I, j\in J} U_{k_{ij}}(e_{ij})$.
Nach (i),(ii) und (1.18) ist $\mathcal{E}$ eine verträgliche Familie, also ist nach (1.17) $U = \bigoplus_{k\in K} U_{(k)}$ .Sei $k\in K, k_{ij} = 1$ für ein (i,j).Dann ist $U_{(k)} = U_1(e_{ij})$,wenn $k_{rs} = 1/2$ für $r = i, s \neq j$ oder $r \neq i, s = j$ und $k_{rs} = 0$ für $r \neq i$ und $s \neq j$,und es ist $U_{(k)} = 0$ sonst.
Ferner ist $U_{(k)} = 0$,wenn $k_{ij} \neq 1$ für alle $(i,j)\in IxJ$ wegen der Vollständigkeit von $\mathcal{E}$ .Dies ist die Behauptung.

Typische Beispiele für rechteckige Gitter ergeben sich aus:

(8.1.6) Seien m,n Kardinalzahlen mit $m \leq n, m+n \geq 3$,seien M, N Mengen mit card M = m,card N = n,sei D eine komplexe,unitale,alternative -für $n+m \geq 4$ assoziative- Algebra mit Involution $d \mapsto \bar{d}$,sei $M_{n,m}(D) := M_{M,N}(D)$ der Raum der Matrizen über D mit Indizes aus MxN,die nur endlich viele von Null verschiedene Koeffizienten besitzen.
Für $x = (x_{ij})_{\substack{i\in M\\ j\in N}} \in M_{m,n}(D)$ sei $x^* := (\overline{x_{ji}})_{\substack{j\in N\\ i\in M}} \in M_{n,m}(D)$.
Durch $\{xy^*x\} := x(y^*x)$ für m = 1,n = 2,
$\{xy^*x\} := (xy^*)x$ sonst
wird $M_{m,n}(D)$ zu einem Jordan - $*$ - Tripel.
(Für assoziatives A ist dies offenbar,für n + m = 3 siehe [Lo3,§3].)
Die natürlichen Matrixeinheiten $(E_{ij})_{\substack{i\in M\\ j\in N}}$ bilden ein überdeckendes rechteckiges Gitter.

Für eine alternative Algebra D bezeichne D^J die Jordanifizierung von D [Br2,§1].

(8.1.7) Koordinatisierungssatz [Mc,3.4]
Seien m,n,M,N wie in (8.1.6),sei $1 \in M \cap N, 2 \in N$.
Ein Jordan - $*$ - Tripel U enthält ein überdeckendes rechteckiges Gitter $(e_{ij})_{\substack{i\in M\\ j\in N}}$ genau dann,wenn es eine komplexe, alternative - für $n+m \geq 4$ assoziative Algebra D mit Eins e_{11}

und Involution und einen Isomorphismus $\Phi: U \to M_{m,n}(D)$ gibt, so daß D^J $*$-isomorph zu $U_1(e_{11})$ (aufgefaßt als Jordan-$*$-Algebra) ist und $\Phi(e_{ij}) = E_{ij}$ für alle $i \in I, j \in J$ gilt. Das Produkt auf D ist gegeben durch $a \cdot b := 4\{\{ae_{11}^* e_{12}\} e_{12}^* b\}$ $(a,b \in U_1(e_{11}))$.

Beweis: Es soll an diesem Beispiel einmal gezeigt werden, wie man gemäß (1.9) Ergebnisse aus [Mc] übertragen kann: Seien zunächst $m,n < \infty$, sei $U_{\mathbb{R}}$ das unterliegende reelle Jordan-Tripelsystem. Dann gibt es auf $D = U_1(e_{11})$ nach [Mc,3.4] ein Produkt und eine Involution, gegeben durch $a \cdot b = 4\{\{ae_{11}^* e_{12}\} e_{12}^* b\}$ und $\bar{a} = \{e_{11} a^* e_{11}\}$ [Mc,3.3 mit 1.6], mit denen D zu einer reellen, alternativen - für $n + m \geq 4$ assoziativen - Algebra mit Eins e_{11} wird, und es gibt einen Isomorphismus $\Phi: U_{\mathbb{R}} \to M_{m,n}(D)$. D ist ein komplexer Vektorraum, das angegebene Produkt und die Involution sind komplex-bilinear bzw. komplex-antilinear, der im Beweis von [Mc,3.4] angegebene Isomorphismus Φ ist komplex-linear und bildet $x_{ij} \in U_1(e_{ij})$ ab auf

$\Phi_{ij}(x_{ij}) := 2^k \{e_{11} e_{i1}^* \{e_{11} e_{1j} x_{ij}\}\} E_{ij}$, wobei $k := 2 - \delta_{i1} - \delta_{j1}$ (δ das Kronecker-Symbol) [Mc,3.3 mit 1.6]

Seien nun m,n beliebig, seien $I \subset M, J \subset N$ endliche Mengen mit $1 \in I \cap J$. Dann ist das Untertripel $U_{I,J}$ (s. (8.1.5)(3)) isomorph zu $M_{I,J}(D)$ vermöge $\Phi_{I,J} := \sum_{i \in I, j \in J} \Phi_{ij}$. Durch $\Phi := \sum_{i \in M, j \in N} \Phi_{ij}$ wird also ein Isomorphismus der gewünschten Form definiert. Qed

Für die Konstruktion von rechteckigen Gittern sind folgende Begriffe nützlich:

(8.1.8) Def Eine kollineare Familie $(e_i)_{i \in I}$ von Tripotenten in U heiße vollständig, wenn e_i vollständig ist für ein $i \in I$ und $\bigcap_{i \in I} U_{1/2}(e_i) = 0$ ist.

(8.1.9)(1) Aus der Existenz von Austauschautomorphismen für kollineare Tripotente [Mc,1.1] folgt,daß e_i für alle $i \in I$ vollständig ist.Damit folgt aus (1.13) und $U_1(e_i) = Q(e_i)U$, daß $e_i \top e_j$ für $i \neq j$ gilt.
(2) Die Vollständigkeitsbegriffe aus (8.1.4) und (8.1.8) sind im folgenden Sinn verträglich:
Ein rechteckiges Gitter $\mathcal{E} := (e_{ij})_{\substack{i\in I\\ j\in J}}$ mit card I = 1 oder card J = 1 ist nach (8.1.4) eine kollineare Familie $(e_k)_{k\in K}$ (K:= IxJ).
Sei $\mathcal{E}$ vollständig als kollineare Familie:Weil für alle $k \in K$ e_k vollständig ist,folgt aus $p_1^k(x) = 0$ für ein $x \in U$ und alle $k \in K$,daß $x \in \bigcap_{k\in K} U_{1/2}(e_k) = 0$.
Sei $\mathcal{E}$ vollständig als rechteckiges Gitter:Sei $k \in K$, $x \in U_o(e_k)$.Nach (8.1.4)(i) ist $U_1(e_l) \subset U_{1/2}(e_k)$ für alle $l \in K, k \neq l$.Wegen der Verträglichkeit von e_k und e_l ist dann $p_1^l(x) = 0$ für alle $l \in K$,d.h. $x = 0$.Somit ist e_k vollständig.Für $x \in U_{1/2}(e_k)$ gilt $p_1^k(x) = 0$,somit ist $\bigcap_{k\in K} U_{1/2}(e_k) = 0$.

(8.1.10) Def (1) Ein Paar von Familien von Tripotenten $\mathcal{R} := ((e_{is})_{i\in I}, (e_{rj})_{j\in J})$ heiße ein Rahmen,wenn $r \in I, s \in J$, card I ≠ 1 ≠ card J ist und für alle $i,k \in I, j,l \in J$ gilt:
(i) $e_{is} \perp e_{rj}$ für $i \neq r$ und $j \neq s$,
(ii) $e_{is} \top e_{ks}$,$e_{rj} \top e_{rl}$ für $i \neq k, j \neq l$,
(iii) $U_{1/2}(e_{is}) \cap U_{1/2}(e_{rs}) \cap U_{1/2}(e_{rj}) = 0$ für $i \neq r$ und $j \neq s$.
Sei $e_{ij} := 2\{e_{is}e_{rs}^{*}e_{rj}\}$ für $i \neq r$ und $j \neq s$.

(8.1.11) Lemma Enthält U einen Rahmen wie in (8.1.10),so gibt es involutorische Automorphismen $R_i (i \in I)$ und C_j $(j \in J)$ von U,so daß für alle $i,k \in I, j,l \in J$ gilt:
(1) $R_i(e_{rs}) = e_{is}$,$R_i(e_{ks}) = e_{ks}$ für $i \neq k \neq r$,
$C_j(e_{rs}) = e_{rj}$,$C_j(e_{rl}) = e_{rl}$ für $j \neq l \neq s$,
$R_r = C_s = Id$,
(2) $R_i(e_{rj}) = C_j(e_{is}) = e_{ij}$ für $i \neq r, j \neq s$,
(3) $R_iC_j = C_jR_i$.

Beweis: Sei $i \in I, j \in J, i \neq r, j \neq s$. Dann ist $(e_{is}, e_{rs}, e_{rj}, e_{ij})$ ein Viereck (8.1.3). Wegen (8.1.10)(iii) sind daher die Bedingungen von [Mc,1.6] erfüllt, und es gibt einen involutorischen Automorphismus R_i, für den (1) gilt.
C_j erhält man ebenso durch Betrachtung des Vierecks $(e_{rj}, e_{rs}, e_{is}, e_{ij})$.
(2) folgt aus [Mc,1.6(iii)].
Es ist $U = \bigoplus_{k,l=0,1/2,1} U_k(e_{is}) \cap U_l(e_{rs})$ nach (1.18). Betrachtet man die Einschränkungen von $R_i C_j$ und $C_j R_i$ auf die Summanden dieser Summe, so folgt (3) aus [Mc,1.6(iii) und (iv)] sowie (1) und (2): Der Rest des Beweises sei hier nur für $k = 1, l = 1/2$ durchgeführt. Die anderen Fälle behandelt man entsprechend.
Nach [Mc,1.6(iii)] ist $R_i(z) = 2(e_{rs} \square e_{is}^*)(z)$. Da C_j ein Automorphismus ist, gilt nach (1) und (2): $C_j R_i(z) = 2(e_{rj} \square e_{ij}^*) C_j(z)$. Aus demselben Grund ist $C_j(z) \in U_1(e_{ij}) \cap U_{1/2}(e_{rj})$. Aus [Mc,1.6(iv) und (iii)] folgt dann $R_i C_j(z) = 2(e_{rj} \square e_{ij}^*) C_j(z)$. Qed

(8.1.12) Lemma Voraussetzungen und Bezeichnungen seien wie in (8.1.11). Dann ist $\mathcal{E} := (e_{ij})_{\substack{i \in I \\ j \in J}}$ ein rechteckiges Gitter.

Beweis: Es genügt zu zeigen, daß $(e_{ij}, e_{il}, e_{kl}, e_{kj})$ ein Viereck ist für alle $i,k \in I, j,l \in J$ mit $i \neq k$ und $j \neq l$, denndadurch sind auch (8.1.4)(i),(ii),(iv) erfaßt (siehe (8.1.5)).
Aus (8.1.11) folgt für $i \neq r$: $R_k e_{ij} = R_k C_j e_{is} = C_j R_k e_{is} = C_j e_{is} = e_{ij}$, für $l \neq s$: $C_j(e_{il}) = e_{il}$. Unter $R_k C_j$ wird daher $(e_{ij}, e_{il}, e_{kl}, e_{kj})$ abgebildet auf $(e_{is}, e_{il}, e_{rl}, e_{rs})$ für $i \neq r$ und $l \neq s$, auf $(e_{ks}, e_{kl}, e_{rl}, e_{rs})$ für $i = r, l \neq s$, auf $(e_{is}, e_{ij}, e_{rj}, e_{rs})$ für $i \neq r, l = s$ und auf $(e_{ks}, e_{kj}, e_{rj}, e_{rs})$ für $i = r, l = s$.
Die Bild-Quadrupel sind Vierecke, wie aus (8.1.2),(8.1.3) und der Definition von e_{ij} $(r \neq i \in I, s \neq j \in J)$ folgt. Unter Automorphismen gehen Vierecke in Vierecke über. Daraus folgt

die Behauptung. Qed

Für $i \in I, j \in J$ sei p_k^{ij} $(k = 0, 1/2, 1)$ die Peirce-k-Projektion von e_{ij}.

(8.1.13) Lemma Voraussetzungen und Bezeichnungen seien wie in (8.1.11). Seien $i,k \in I, j,l \in J$ mit $i \neq k, j \neq l$.
Dann ist $p_{1/2}^{ij} p_{1/2}^{kl} = p_1^{il} + p_1^{kj}$.

Beweis: Durch Anwendung des Automorphismus $R_k C_j$ wie im Beweis von (8.1.12) sieht man, daß es genügt, den Fall $k = r$, $j = s$ zu betrachten. Dazu genügt es wegen der Verträglichkeit der Familie $\mathcal{E} := (e_{ij})_{\substack{i \in I \\ j \in J}}$ zu zeigen, daß
$V := U_{1/2}(e_{is}) \cap U_{1/2}(e_{rl}) = U_1(e_{il}) + U_1(e_{rs})$ ist.
Die rechte Seite ist in der linken enthalten, wie aus (8.1.12) und der Definition des rechteckigen Gitters folgt.
Die linke Seite ist in der rechten enthalten: Mit (8.1.12) berechnet man: $e_{il} + e_{rs} = Q(e_{is} + e_{rl})(e_{il} + e_{rs}) \in U_1(e_{is} + e_{rl})$,
$e_{is} + e_{rl} = Q(e_{il} + e_{rs})(e_{is} + e_{rl}) \in U_1(e_{il} + e_{rs})$,
also ist nach (1.23) $U_1(e_{il} + e_{rs}) = U_1(e_{is} + e_{rl})$.
Es gilt $V \subset U_1(e_{is} + e_{rl})$ wegen der Orthogonalität von e_{is} und e_{rl}.
Ferner ist $U_1(e_{il} + e_{rs}) = U_1(e_{il}) + U_1(e_{rs}) + U_{1/2}(e_{il}) \cap U_{1/2}(e_{rs})$ nach (1.20). Aus (8.1.10)(iii) folgt $V \cap U_{1/2}(e_{rs}) = 0$,
also ist, wiederum wegen der Verträglichkeit von $\mathcal{E}$,
$V \subset U_1(e_{il}) + U_1(e_{rs})$. Qed

Das Bisherige soll nun auf JBW*-Tripel angewandt werden:

(8.1.14) Seien H,K komplexe Hilberträume. Für $z,h \in H, k \in K$ deifiniere man $k \boxtimes h^*(z) := (z|h)k$. Dann ist $k \boxtimes h^* \in \mathcal{L}(H,K)$.
Seien $(x_i)_{i \in I}$ bzw. $(y_j)_{j \in J}$ Orthonormalbasen von H bzw. K, sei $e_{ij} := y_j \boxtimes x_i^*$ $(i \in I, j \in J)$. Dann ist $\mathcal{E} := (e_{ij})_{\substack{i \in I \\ j \in J}}$ ein vollständiges rechteckiges Gitter in $C := \mathcal{L}(H,K)$.

Die Elemente von $\mathcal{E}$ sind minimale Tripotente in C.
Sei T ein lokalkompakter Raum mit positivem Radonmaß μ, sei $U := L^\infty_w(T,\mu,C)$. Dann ist $\mathcal{E}$ ein rechteckiges Gitter von abelschen Tripotenten in U (6.14). $\mathcal{E}$ ist vollständig in U: Sei oBdA card $I \leq$ card J, $I \subset J$. Dann ist $\mathcal{F} := (e_{ii})_{i\in I}$ eine vollständige orthogonale Familie von Tripotenten in C, also in U (6.14)(3). Seien p_k^{ij} die Peirce-k-Projektionen von e_{ij} in U.
Sei nun $z \in U, z \neq 0$, und $p_1^{ij}(z) = 0$ für alle $i \in I, j \in J$. Weil $\mathcal{F}$ vollständig ist in U, gibt es ein $i \in I$ mit $p_{1/2}^{ii}(z) \neq 0$. Gäbe es ein $j \in I, j \neq i$, mit $v := p_{1/2}^{jj} p_{1/2}^{ii}(z) \neq 0$, so läge v in dem Peirce-Raum $U_{ij} = L^\infty_w(T,\mu,\mathbb{C}e_{ij} \oplus \mathbb{C}e_{ji})$ nach (6.14)(3). Wegen der Verträglichkeit von $\mathcal{E}$ wäre dann $(p_1^{ij}+p_1^{ji})(z) \neq 0$. Also ist $p_{1/2}^{ii}(z) \in U_{io} = L^\infty_w(T,\mu,\mathcal{L}(\mathbb{C}x_i, \oplus^2_{j\notin I}\mathbb{C}y_j))$ (6.14)(3). Dann folgt aber mit (6.24) $p_1^{ij} p_{1/2}^{ii}(z) \neq 0$ für ein $j \in J\setminus I$, ein Widerspruch. Also ist $\mathcal{E}$ vollständig in U. Qed

Es gilt nun als Umkehrung der folgende Koordinatisierungssatz für JBW*-Tripel:

(8.1.15) Satz Das JBW*-Tripel U enthalte ein vollständiges rechteckiges Gitter $\mathcal{E} := (e_{ij})_{\substack{i\in I \\ j\in J}}$ von abelschen Tripotenten. Dann ist U isomorph zu $L^\infty_w(T,\mu,C^1_{mn})$, wobei T ein lokalkompakter Raum mit positivem Radonmaß μ ist, so daß $L^\infty(T,\mu)$ $*$-isomorph zu $U_1(e_{ij})$ ist für alle $i \in I, j \in J$, und $m = \min(\text{card}I, \text{card}J)$, $n = \max(\text{card}I, \text{card}J)$ ist.

Beweis: Sei oBdA card $I \leq$ card J. (Man betrachte sonst das Gitter $(f_{ji})_{\substack{j\in J \\ i\in I}}$, definiert durch $f_{ji} := e_{ij}$.)
e_{ij} ist abelsch für alle $i \in I, j \in J$, d.h. $U_1(e_{ij})$ ist (gemäß (2.19)) eine kommutative W*-Algebra. Kollineare Tripotente sind durch einen Automorphismus vertauschbar [Mc,1.1]. Je zwei verschiedene e_{ij}, e_{kl} sind zueinander kollinear oder zu einem dritten Gitterelement kollinear. Daher gibt es

einen lokalkompakten Raum T mit positivem Radonmaß μ, so daß $L^\infty(T,\mu)$ $*$-isomorph zu $U_1(e_{ij})$ für alle $i \in I, j \in J$ ist.

1) Sei $n := \operatorname{card} J < \infty$: Dann ist $\mathcal{E}$ überdeckend (8.1.5)(4). Nach (8.1.7) ist U isomorph zu $M_{m,n}(D)$ für eine unitale, alternative Algebra mit Involution D mit vollständiger Norm und stetigem Produkt, so daß D^J $*$-isomorph zu $L^\infty(T,\mu)$ ist. Dann ist D eine alternative C^*-Algebra [Br2,(2.14)], und weil D^J assoziativ ist, folgt $D = D^J$ [Br1,(4.24)]. Also ist U isomorph zu $M_{m,n}(L^\infty(T,\mu)) = L^\infty_w(T,\mu,C^1_{mn})$.

2) Sei n unendlich: Seien H,K komplexe Hilberträume mit $\dim H = m$, $\dim K = n$. Ein vollständiges rechteckiges Gitter $(\tilde{e}_{ij})_{i\in I, j\in J}$ von abelschen Tripotenten in $\tilde{U} := L^\infty_w(T,\mu,\mathcal{L}(H,K))$ sei definiert wie in (8.1.14).

Sei nun $S_1 := \bigoplus_{i\in I, j\in J} U_1(e_{ij})$, seien p_k^{ij} $(k = 0, 1/2, 1)$ die Peirce-k-Projektionen von e_{ij} in U. Analog seien $\tilde{S}_1, \tilde{p}_k^{ij}$ für $\tilde{U}$ definiert.

Nach (8.1.5)(3) sind $S_1, \tilde{S}_1$ Untertripel von $U, \tilde{U}$, und nach (8.1.7) gibt es Isomorphismen $\varphi: S_1 \to M_{m,n}(L^\infty(T,\mu))$ und $\tilde{\varphi}: \tilde{S}_1 \to M_{m,n}(L^\infty(T,\mu))$ mit $\varphi(e_{ij}) = E_{ij} = \tilde{\varphi}(\tilde{e}_{ij})$. $\varphi_1 := \tilde{\varphi}^{-1} \circ \varphi$ ist dann ein Isomorphismus von S_1 auf $\tilde{S}_1$ mit $\varphi_1(e_{ij}) = \tilde{e}_{ij}$ für alle $i \in I, j \in J$.

Der Fortsetzungssatz (4.5) kann nun nicht unmittelbar auf die Familien der endlichen Summen der p_1^{ij} bzw. $\tilde{p}_1^{ij}$ $(i \in I, j \in J)$ angewandt werden, da diese endlichen Summen im allgemeinen keine kontraktiven Projektionen mehr sind. Wir gehen daher in zwei Schritten vor:

Weil n unendlich ist, gibt es eine Menge K von Injektionen von I in J, so daß $\operatorname{card} K = \operatorname{card} J$ $(= n)$ und $(k(I))_{k\in K}$ eine Partition von J ist.

Sei $f_k := \sum^{\sigma^*}_{i\in I} e_{ik(i)}$ $(k \in K)$ (wobei bezüglich σ^* summiert wird, vgl. (3.15)). Zu $z \in U, z \neq 0$, gibt es ein $i \in I$ und ein $j \in J$ mit $p_1^{ij}(z) \neq 0$. Dann ist nach Definition eines rechteckigen Gitters $(p_1^{ik(i)} + p_{1/2}^{ik(i)})(z) \neq 0$ für alle $k \in K$, d.h. $(e_{ik(i)})_{i\in I}$ ist eine vollständige orthogonale Familie

von Tripotenten in U für alle $k \in K$. Damit ist f_k ein vollständiges Tripotent in U für alle $k \in K$ (3.15).
Für $i \in I, j \in J$ und dasjenige $k \in K$ mit $j \in k(I)$ gilt $U_1(e_{ij}) \subset U_1(f_k)$. Aus der Verträglichkeit von e_{ij} und f_k und der Vollständigkeit von $\mathcal{E}$ folgt dann, daß die Familie $(p_k)_{k \in K}$ der Peirce-1-Projektionen von f_k treu ist.
p_k ist hermitesch für alle $k \in K$ (2.21). Unter Benutzung der partiellen σ^*-Stetigkeit des Tripelprodukts erhält man, daß f_k und f_h für $h, k \in K, k \neq h$, kollinear sind. Aus (8.1.9)(1) erhält man $f_k \top f_h$, insbesondere sind also p_k und p_h orthogonal.
Sei L die Menge der endlichen Teilmengen von K, $q_l := \sum_{k \in l} p_k$ $(l \in L)$. Dann ist $(q_l)_{l \in L}$ eine nach oben gerichtete, treue Familie von σ^*-stetigen, hermiteschen - daher kontraktiven - Projektionen auf U. Aus (1.13) und $f_h \top f_k$ für $h, k \in K, h \neq k$, folgt, daß $q_l(U)$ für alle $l \in L$ ein Untertripel von U ist.
Sei $S_2 := \bigoplus_{k \in K} U_1(f_k)$ $(= \bigcup_{l \in L} q_l(U))$. S_2 ist ein Untertripel von U.
Sei H die Menge der endlichen Teilmengen von I. Man wähle ein $k \in K$. Für $h \in H$ sei $e_h := \sum_{i \in h} e_{ik(i)}$, sei r_h die Peirce-1-Projektion von e_h. Weil $p_1^{ij} r_h = 0$ ist für $(i,j) \notin h \times k(h)$, ist das rechteckige Gitter $(e_{ij})_{\substack{i \in h \\ j \in k(h)}}$ vollständig in $r_h(U) = U_1(e_h)$. Nach (8.1.5)(4) ist $r_h(U) = \bigoplus_{i \in h, j \in k(h)} U_1(e_{ij})$, also $\bigcup_{h \in H} r_h(U) = S_1 \cap U_1(f_k)$. $(r_h)_{h \in H}$ ist eine nach oben gerichtete, auf $U_1(f_k)$ treue Familie von σ^*-stetigen, kontraktiven (2.21) Projektionen.
Wie in U definiere man nun analog in $\tilde{U}$ eine streng kollineare Familie $(\tilde{f}_k)_{k \in K}$ von vollständigen Tripotenten, Projektionen $\tilde{p}_k$ $(k \in K)$, $\tilde{q}_l$ $(l \in L)$, ein Untertripel $\tilde{S}_2$ sowie für das oben gewählte $k \in K$ Tripotente $\tilde{e}_h$ und Projektionen $\tilde{r}_h$ $(h \in H)$. Diese besitzen die analogen Eigenschaften.
Wegen $\varphi_1(e_{ij}) = \tilde{e}_{ij}$ für alle $i \in I, j \in J$ gilt $\varphi_1(e_h) = \tilde{e}_h$, also $\tilde{r}_h \circ \varphi_1 = Q(\varphi_1(e_h))^2 \circ \varphi_1 = \varphi_1 \circ Q(e_h)^2 \big|_{S_1} = \varphi_1 \circ r_h \big|_{S_1}$ für alle $h \in H$.

Nach (4.5) besitzt daher $\varphi_1|_{S_1 \cap U_1(f_k)}$ eine eindeutige Fortsetzung zu einem - nach (3.23) σ^*-stetigen - Tripelisomorphismus τ_k von $U_1(f_k)$ auf $U_1(\tilde{f}_k)$ mit $\tau_k(f_k) = \tilde{f}_k$ für das (beliebig) gewählte und damit für jedes $k \in K$.
Sei nun $l \in L$. $\tau_l := \sum_{k \in l} \tau_k$ ist σ^*-stetig auf $S_l := \bigoplus_{k \in l} U_1(f_k)$, $\tau_l|_{S_1 \cap S_1}$ ist ein Isomorphismus und $S_1 \cap S_1$ ist σ^*-dicht in S_1, da $S_1 \cap U_1(f_k)$ für alle $k \in K$ σ^*-dicht ist in $U_1(f_k)$ wegen (4.4), angewandt auf $(r_h)_{h \in H}$. Wegen der partiellen σ^*-Stetigkeit des Tripelprodukts ist daher τ_l ein Isomorphismus.
Durch $\varphi_2|_{U_1(f_k)} := \tau_k$ wird daher ein Isomorphismus φ_2 von $S_2 = \bigcup_{l \in L} S_l$ auf $\tilde{S}_2$ definiert, der φ_1 fortsetzt und es gilt $\tilde{q}_1 \circ \varphi_2 = \varphi_2 \circ q_1|_{S_2}$.
Eien weitere Anwendung von (4.5) liefert schließlich die Behauptung des Satzes. Qed

§ 8.2 Der antisymmetrische Typ

Sei im folgenden immer U ein Jordan -$*$- Tripel.

(8.2.1) Def ([Mc],[N]) (1) Sei J eine totalgeordnete Menge[1] mit card J =:n$\geq$4.Eine Familie von Tripotenten $\mathcal{F} := (f_{ij})_{\substack{i,j\in J\\ i<j}}$ heiße ein antisymmetrisches Gitter,wenn für die Familie $(f_{ij})_{i,j\in J}$,definiert durch

(i) $f_{ji} := -f_{ij}$ $(i<j)$, $f_{ii} = 0$,gilt:

(ii) $(f_{ij},f_{kj},f_{kl},f_{il})$ ist ein Viereck für paarweise verschiedene $i,j,k,l \in J$.

(2) $\mathcal{F}$ heiße überdeckend,wenn $U = \bigoplus_{i<j} U_1(f_{ij})$ ist.

(3) $\mathcal{F}$ heiße vollständig,wenn die Familie $(p_1^{ij})_{i,j\in J}$ der Peirce-1-Projektionen von f_{ij} treu ist.

(8.2.2) Bemerkungen: (1) In (ii) ist wegen n$\geq$4 insbesondere enthalten:

(iii) $f_{ij} \perp f_{kl}$ für $\{i,j\} \cap \{k,l\} = \emptyset$,
$f_{ij} \top f_{kl}$ für card $(\{i,j\} \cap \{k,l\}) = 1$.

Aus (ii) und (1.13) schließt man (vgl. (8.1.5)(1)):

(iv) Produkte von Elementen von $\mathcal{F}$,die nicht durch (ii) bestimmt sind,verschwinden.

(2) Ist $\mathcal{F}$ überdeckend,so ist $\mathcal{F}$ vollständig.Für endliches $\mathcal{F}$ gilt auch die Umkehrung (vgl. (8.1.5)(4)).

(3) Betrachtet man Vierecke,die durch zyklische Permutation der Elemente oder durch Vertauschen orthogonaler Elemente (siehe (8.1.2)) oder unter Berücksichtigung von (8.2.1)(i) auseinander hervorgehen,als nicht wesentlich verschieden, so kann man aus $\mathcal{F}$ für endliches n genau $3\binom{n}{4}$ wesentlich verschiedene Vierecke bilden.

---

1) Diese Forderung soll nur eine bequeme Notation ermöglichen.Jede Menge läßt sich bekanntlich total ordnen.

Beispiele für antisymmetrische Gitter erhält man aus:

(8.2.3) Sei J eine totalgeordnete Menge mit card J =: $n \geq 4$, sei D eine komplexe,unitale,kommutative,assoziative Algebra mit Involution $d \mapsto \bar{d}$ .Sei $M_{n,n}(D)$ definiert wie in (8.1.6), sei $z \mapsto {}^t z$ die natürliche Transposition auf $M_{n,n}(D)$.Dann ist $A_n(D) := \{z \in M_{n,n}(D) \mid z = -{}^t z\}$ ein Jordan - $*$ - Tripel in dem Produkt $\{xy^*z\} := 1/2(x\,{}^t\bar{y}z + z\,{}^t\bar{y}x)$.Sind E_{ij} $(i,j \in J)$ die natürlichen Matrixeinheiten von $M_{n,n}(D)$,so wird durch $F_{ij} := E_{ij} - E_{ji}$ $(i<j)$ ein überdeckendes antisymmetrisches Gitter auf $A_n(D)$ definiert.

(8.2.4) Koordinatisierungssatz [Mc,4.4]
Ein Jordan - $*$ - Tripel U enthält ein überdeckendes antisymmetrisches Gitter $(f_{ij})_{\substack{i,j\in J \\ i<j}}$ genau dann,wenn es eine unitale,kommutative,assoziative Algebra D mit Involution und einen Isomorphismus $\varphi: U \to A_n(D)$ mit $\varphi(f_{ij}) = F_{ij}$ für alle $i,j \in J$ gibt.
Insbesondere ist dann f_{ij} für alle $i,j \in J$ abelsch,und D ist $*$ -isomorph zu $U_1(f_{ij})$.

Beweis: Der Beweis von [Mc,4.4] überträgt sich mit Hilfe von (1.9),wie im Beweis von (8.1.7) vorgeführt. Qed

Das Bisherige wird nun auf JBW*-Tripel angewandt:

(8.2.5) Sei J eine totalgeordnete Menge mit card J =: $n \geq 4$, sei H ein komplexer Hilbertraum der Dimension n mit Konjugation,sei $(x_j)_{j\in J}$ eine Orthonormalbasis von H.
Durch $F_{ij} := x_i \otimes \bar{x}_j^* - x_j \otimes \bar{x}_i^*$ $(i,j \in J)$ (vgl. (8.1.14)) wird in C_n^2 (siehe §6,Typ 2) ein antisymmetrisches Gitter $\mathfrak{F} := (F_{ij})_{i<j}$ definiert.
Sei p_t^{ij} die Peirce-t-Projektion von F_{ij} auf C_n^2 $(t = 0,1/2,1,$ $i,j \in J, i \neq j)$.Für paarweise verschiedene $i,j,k,l \in J$ gilt

offenbar $p_{1/2}^{ij}p_{1/2}^{kl} = \sum_{r=i,j}\sum_{s=k,l} p_1^{rs}$.

Sei nun T ein lokalkompakter Raum mit positivem Radonmaß μ, sei $U := L_w^\infty(T,\mu,C_n^2)$. Dann ist $\mathcal{F}$ ein antisymmetrisches Gitter in U (6.14). Sei $\tilde{p}_t^{ij}$ die Peirce-t-Projektion von F_{ij} auf U. Dann gilt für paarweise verschiedene $i,j,k,l \in J$:

(8.2.6) $\tilde{p}_{1/2}^{ij}\tilde{p}_{1/2}^{kl} = \sum_{r=i,j}\sum_{s=k,l} \tilde{p}_1^{rs}$.

$\mathcal{F}$ ist vollständig in U: Für endliches n ist die Behauptung offenbar. Für unendliches n gibt es Mengen K,L mit $J = K \dot\cup L$ und eine Bijektion $j: K \to L$. Dann ist $\mathcal{E} := (F_{kj(k)})_{k\in K}$ eine vollständige orthogonale Familie von Tripotenten in C_n^2 und $F := \sum_{k\in K} F_{kj(k)}$ ist unitär in C_n^2 nach [Ka3,§3]. Nach (6.14) ist dann $\mathcal{E}$ eine vollständige orthogonale Familie in U und F ist unitär in U.

Sei $0 \neq z \in U$ und $\tilde{p}_1^{ij}(z) = 0$ für alle $i,j \in J$. Wegen der Vollständigkeit von $\mathcal{E}$ gibt es dann ein $i \in K$ mit $\tilde{p}_{1/2}^{ij(i)}(z) \neq 0$. Weil F unitär in U ist, gibt es dann ein $k \in K, k \neq i$, mit $\tilde{p}_{1/2}^{kj(k)}\tilde{p}_{1/2}^{ij(i)}(z) \neq 0$, woraus mit (8.2.6) ein Widerspruch folgt. Also ist $\mathcal{F}$ vollständig in U.

Als Umkehrung gilt der folgende Koordinatisierungssatz für JBW*-Tripel:

(8.2.7) Satz Das JBW*-Tripel U enthalte ein vollständiges antisymmetrisches Gitter $\mathcal{F} := (f_{ij})_{\substack{i,j\in J\\ i<j}}$ mit $\operatorname{card} J =: n \geq 4$. Dann ist U isomorph zu $L_w^\infty(T,\mu,C_n^2)$ für einen lokalkompakten Raum T mit positivem Radonmaß μ, so daß $L^\infty(T,\mu)$ $*$-isomorph zu $U_1(f_{ij})$ für alle $i,j \in J$ $(i \neq j)$ ist.

Beweis: $S := \bigoplus_{i<j} U_1(f_{ij})$ ist ein Untertripel von U (nach Def (8.2.1) und (1.13)) mit überdeckendem Gitter $\mathcal{F}$. Nach (8.2.4) ist daher f_{ij} abelsch für alle $i,j \in J$, und die kommutative W*-Algebra $U_1(f_{ij})$ ist $*$-isomorph zu $L^\infty(T,\mu)$ für einen lokalkompakten Raum T mit positivem Radonmaß μ und alle

$i,j \in J$ $(i \neq j)$.
Ist J endlich,so ist $\mathfrak{F}$ überdeckend (8.2.2),und mit (8.2.4) folgt,daß U isomorph ist zu $A_n(L^\infty(T,\mu)) = L^\infty_w(T,\mu,C_n^2)$.
Ist J unendlich,so sei $J = K \cup L$ und $j:K \to L$ eine Bijektion, sei $\widetilde{U} := L^\infty_w(T,\mu,C_n^2)$.In $\widetilde{U}$ sei ein vollständiges antisymmetrisches Gitter $\widetilde{\mathfrak{F}} := (F_{ij})_{i,j \in J,\, i<j}$ definiert wie in (8.2.5),sei $\widetilde{S} := \bigoplus_{i<j} \widetilde{U}_1(F_{ij})$,sei H die Menge der endlichen Teilmengen von K,für $h \in H$ sei $f_h := \sum_{i \in h} f_{ij(i)}$,$F_h := \sum_{i \in h} F_{ij(i)}$.
Dann sind f_h bzw. F_h Tripotente in U bzw. $\widetilde{U}$.Sei p_h bzw. $\widetilde{p}_h$ die Peirce-1-Projektion von f_h bzw. F_h auf U bzw. $\widetilde{U}$.
Für $i,j \in h \cup j(h)$ ist $U_1(f_{ij}) \subset U_1(f_h) = p_h(U)$.Daher ist $S = \bigcup_{h \in H} p_h(U)$.Genauso erhält man $\widetilde{S} = \bigcup_{h \in H} \widetilde{p}_h(\widetilde{U})$.
Wegen der Vollständigkeit von $\mathfrak{F}$ und $\widetilde{\mathfrak{F}}$ sind also $(p_h)_{h \in H}$ bzw. $(\widetilde{p}_h)_{h \in H}$ nach oben gerichtete,treue Familien von σ^*-stetigen,kontraktiven (2.21) Projektionen auf U bzw. $\widetilde{U}$.
Nach (8.2.4) gibt es einen Tripelisomorphismus $\varphi:S \to \widetilde{S}$ mit $\varphi(f_{ij}) = F_{ij}$ für alle $i,j \in J$;dann ist $\widetilde{p}_h \circ \varphi = \varphi \circ p_h|_S$ für alle $h \in H$. φ kann daher nach (4.5) zu einem Tripelisomorphismus $\Phi:U \to \widetilde{U}$ fortgesetzt werden. Qed

Zum Abschluß des Paragraphen beweisen wir noch ein in §9.3 und §9.5 benötigtes technisches Lemma.
Sei U ein Jordan - *- Tripel.Wir vereinbaren folgende Bezeichnung:Für Tripotente e,f,g,h in U heiße "((e,f,g,h))", daß (e,f,g,h) ein Viereck ist.

(8.2.8) Lemma Sind f_{12},f_{34},f_{io} $(i = 1,2,3)$ Tripotente in U, so daß je zwei von ihnen orthogonal sind,wenn sie keinen Index gemeinsam haben,und streng kollinear sonst,so wird durch:
(i) $f_{i4} := 2\{f_{io}f_{3o}^* f_{34}\}$ $(i = 1,2)$,
(ii) $f_{13} := 2\{f_{12}f_{24}^* f_{34}\}$, $f_{23} := -2\{f_{12}f_{14}^* f_{34}\}$,
(iii) $f_{4o} := -2\{f_{1o}f_{13}^* f_{34}\}$,

(iv) $f_{ij} = -f_{ji}$ für $0 \leq i < j \leq 4$
ein antisymmetrisches Gitter $(f_{ij})_{0 \leq i < j \leq 4}$ in U definiert.

Beweis: Nach (8.2.2)(3) sind $3\binom{5}{4} = 15$ wesentlich verschiedene Vierecke nachzuprüfen.
Für Tripotente f_{ij}, f_{ik} $(j \neq k)$ bezeichne T_{ijik} $(= T_{ikij} = T_{jiki} = T_{kiji})$ den kollinearen Austauschautomorphismus gemäß [Mc,1.1].Aus (i) erhält man mit (8.1.3):
(1) $((f_{1o}, f_{3o}, f_{34}, f_{14}))$ und
(2) $((f_{2o}, f_{3o}, f_{34}, f_{24}))$ und weiter aus (i) mit (1.13):
$f_{i4} \in U_{1/2}(f_{12})$ $(i = 1,2)$;es ist $f_{12} \top f_{io}$ und aus (1) und (2) folgt $f_{io} \top f_{i4} \top f_{34}$ $(i = 1,2)$,daher mit (1.22):$f_{12} \top f_{i4}$.
Aus (ii) folgt dann mit (8.1.3):
(3) $((f_{12}, f_{24}, f_{34}, f_{13}))$ und
(4) $((f_{12}, f_{14}, f_{34}, f_{32}))$.
Aus (2) folgt mit (1.13):$f_{1o} \perp f_{24}$,aus (3) folgt $f_{34} \top f_{13}$ und $f_{13} \top f_{12}$ und mit (1.13):$f_{13} \in U_{1/2}(f_{1o})$,also mit (1.22): $f_{13} \top f_{1o}$.Aus (iii) folgt dann mit (8.1.3):
(5) $((f_{1o}, f_{13}, f_{34}, f_{o4}))$.
Durch geeignete Anwendung von Austauschautomorphismen sollen nun die restlichen Vierecke aus (1) - (5) gewonnen werden.Die ständig benutzten (8.1.3),(1.13),(1.22),[Mc,1.1] sowie (i) - (iv) werden dabei nicht mehr immer zitiert.
Nach (i) und [Mc,1.1] ist $T_{343o} f_{io} = f_{4i}$ $(i = 1,2)$,
aus $f_{1o} \top f_{2o}$ folgt daher $f_{41} \top f_{42}$.
Aus (ii) folgt mit (1.13) und (1) - (4):
$f_{23} \in U_o(f_{41}) \cap U_{1/2}(f_{42})$.Wegen $f_{23} \top f_{12} \top f_{42}$ folgt dann $f_{23} \top f_{42}$,ferner $f_{23} \perp f_{41}$;
somit ist $2\{f_{41} f_{42}^* f_{32}\} = T_{4142} f_{23} = 2T_{4142}\{f_{21} f_{14}^* f_{34}\} = 2\{f_{12} f_{24}^* f_{43}\} = f_{31}$,also ist
(6) $((f_{41}, f_{42}, f_{32}, f_{31}))$.
Aus (3),(4) und(6) folgt also:$(f_{ij})_{1 \leq i < j \leq 4}$ ist ein antisymmetrisches Gitter.
(8.2.9)Beh: Für paarweise verschiedene $i,j,k,l \in \{1,\ldots,4\}$ ist $f_{ij} \top f_{ik}$ und $f_{ij} \perp f_{kl}$:

Beweis von (8.2.9):Die Behauptung ist schon gezeigt für $1 \leq i,j,k,l \leq 4$.

Für $\{i,j\} = \{0,1\}$ ist (8.2.9) schon gezeigt bis auf $f_{1o} \top f_{4o}$,was in (5) enthalten ist,und $f_{1o} \perp f_{23}$,was mit (1.13) aus (ii) folgt.

$f_{12} \top f_{2o} \perp f_{34}$ gilt nach Voraussetzung,
$f_{2o} \perp f_{14}$ folgt aus (i) mit (1.13),
$f_{2o} \top f_{24}$ ist in (2) enthalten,
$f_{2o} \perp f_{13}$ folgt aus (ii) mit (1.13),
$f_{2o} \top f_{23}$ folgt aus (ii) mit (1.22).
Analog zeigt man:$f_{ij} \perp f_{3o} \top f_{3j}$ $(i,j = 1,2,4;i \neq j)$ und
$f_{ij} \perp f_{4o} \top f_{4j}$ $(i,j = 1,2,3;i \neq j)$.
$f_{2o} \top f_{4o} \top f_{3o}$ folgt schließlich mit (iii) und (1.22).
Damit ist (8.2.9) gezeigt.

Mit der in [Mc,1.1] explizit angegebenen Wirkung der T_{ijik} auf die Peirce-Räume von f_{ij}, f_{ik} berechnet man:
T_{3134} (angewandt) auf (1) (ergibt) mit (5):
(7) $((f_{o4},f_{o3},f_{31},f_{41}))$,
T_{3134} auf (2) mit (3):
(8) $((f_{2o},f_{o3},f_{31},f_{12}))$,
T_{3234} auf (1) mit (4):
(9) $((f_{1o},f_{o3},f_{32},f_{21}))$,
T_{1o3o} auf (2) mit (1):
(10) $((f_{o2},f_{1o},f_{41},f_{24}))$,
T_{1434} auf (8) mit (1) und (4):
(11) $((f_{2o},f_{1o},f_{13},f_{23}))$,
T_{1o2o} auf (5) mit (11):
(12) $((f_{2o},f_{32},f_{34},f_{4o}))$,
T_{2343} auf (2) mit (12):
(13) $((f_{o4},f_{o3},f_{32},f_{42}))$,
T_{4341} auf (12) mit (4):
(14) $((f_{2o},f_{21},f_{14},f_{o4}))$,
T_{1o2o} auf (14) mit (10):
(15) $((f_{1o},f_{12},f_{42},f_{4o}))$.
Zu jedem $i \in \{0,\ldots,4\}$ gibt es unter den Vierecken (1) - (15)

genau drei,in denen der Index i nicht vorkommt und die wesentlich verschieden sind.Daher ist die Liste vollständig und (8.2.8) ist gezeigt. Qed

§ 9 Klassifikation

Das Ziel dieses Paragraphen ist der Beweis des folgenden Satzes:

(9.1.1) Klassifikationssatz
Sei U ein JBW*-Tripel vom Typ I. Dann gibt es eine Familie $(T_k,\mu_k)_{k\in K}$ von lokalkompakten Räumen T_k mit positiven Radonmaßen μ_k und eine Familie $(C_k)_{k\in K}$ von Cartan-Faktoren, so daß U isometrisch isomorph ist zu $\oplus^{\infty}_{k\in K} L^{\infty}_w(T_k,\mu_k,C_k)$.

(9.1.2) Korollar Die JBW*-Tripelfaktoren vom Typ I sind genau die Cartan-Faktoren.

Beweis von (9.1.2): Ein JBW*-Tripelfaktor ist nach (9.1.1) isometrisch isomorph zu $U:= L^{\infty}_w(T,\mu,C)$ für geeignete T,μ,C. Der Cartan-Faktor C enthält ein minimales Tripotent f. Nach (6.14) ist f abelsch in U, und es ist $U_1(f) = L^{\infty}(T,\mu,\mathbb{C}f)$. Nach (5.6) ist f sogar minimal in U. Also ist $L^{\infty}(T,\mu)$ eindimensional. Qed

Der Beweis von (9.1.1) erfolgt in mehreren Schritten: Um eine abkürzende Sprechweise zur Verfügung zu haben, definieren wir zunächst:

(9.1.3) Def Ein JBW*-Tripel U mit vollständigem Tripotent e heiße vom rechteckigen (antisymmetrischen, symmetrischen, Ausnahme-) Typ bzw. vom Typ $I_{1,1}$, $I_{2,n}$ (bezüglich e), wenn $U_1(e)$ *-isomorph ist zu $L^{\infty}_w(T,\mu,A)$ für geeignete T,μ, so daß A ein JBW*-Algebra-Faktor vom entsprechenden Typ ist (vgl. (6.6)).

(9.1.4) Ein JBW*-Tripel vom Typ I enthält nach (5.9) ein vollständiges Tripotent e, so daß die JBW*-Algebra $U_1(e)$ vom Typ I ist.

Nach [E,4.3] ist ein σ^*-abgeschlossenes $*$-Ideal in $U_1(e)$ von der Form $U_1(z)$ für eine e-zentrale Projektion z.
Nach (6.18) - (6.23) gibt es dann eine orthogonale Familie $(z_k)_{k\in K}$ von e-zentralen Projektionen mit $\sum_{k\in K} z_k = e$, lokalkompakte Räume T_k mit positiven Radonmaßen μ_k und JBW*-Algebra-Faktoren A_k von einem der in (9.1.3) angegebenen Typen, so daß $U_1(z_k)$ $*$-isomorph zu $L^\infty_w(T_k,\mu_k,A_k)$ ist.
Nach (5.2) ist dann U isometrisch isomorph zu $\Theta^\infty_{k\in K} U(z_k)$, und $U(z_k)$ ist bezüglich z_k von einem der in (9.1.3) angegebenen Typen.
Man kann sich also im folgenden darauf beschränken, diese Typen einzeln zu untersuchen.

§ 9.2 Typ I_1

(9.2.1) Def Ein JBW*-Tripel U heiße vom Typ $I_{1,n}$ (n eine Kardinalzahl), wenn es eine vollständige kollineare Familie von n abelschen Tripotenten in U gibt.

(9.2.2) Satz Ein JBW*-Tripel U ist genau dann vom Typ $I_{1,n}$, wenn U isomorph ist zu $L^\infty(T,\mu,C^1_{1n})$ für einen lokalkompakten Raum T mit positivem Radonmaß μ.

Beweis: Jede vollständige kollineare Familie von Tripotenten ist insbesondere ein vollständiges rechteckiges Gitter (vgl. (8.1.9)(2)). Die Behauptung folgt daher aus (8.1.14) und (8.1.15), wenn man beachtet, daß C^1_{1n} reflexiv und daher $L^\infty(T,\mu,C^1_{1n}) = L^\infty_w(T,\mu,C^1_{1n})$ ist. Qed

(9.2.3) Lemma Seien U_1, U_2 zueinander isomorphe JBW*-Tripel vom Typ $I_{1,m}$ bzw. vom Typ $I_{1,n}$, sei $\min(n,m) < \infty$.
Dann ist $n = m$.

Beweis: Sei oBdA $m \leq n$. Dann ist U_1 isomorph zu $L^\infty(T,\mu,C^1_{1m}) = L^\infty(T,\mu) \boxtimes C^1_{1m}$. Sei φ ein $*$-Homomorphismus von $L^\infty(T,\mu)$ auf $\mathbb{C}$. Dann wird durch $\Phi(f \boxtimes z) := \varphi(f)z$ ein Homomorphismus von U_1 auf C^1_{1m} definiert.
Sei $\mathcal{F}$ eine vollständige kollineare Familie von n Tripotenten in U_2, sei $\Psi: U_2 \to U_1$ ein Isomorphismus. Es ist $\mathcal{F} \cap \mathrm{Ker}(\Phi \circ \Psi) = \emptyset$, da $\mathcal{F}$ aus vollständigen Tripotenten besteht. Daher ist $\Phi \circ \Psi(\mathcal{F})$ eine kollineare Familie von Tripotenten in C^1_{1m}. Aus Dimensionsgründen folgt $n \leq m$. Qed

(9.2.4) Lemma Sei U ein JBW*-Tripel, $\mathcal{F}$ eine bezüglich der Inklusion maximale kollineare Familie von abelschen und vollständigen Tripotenten in U.
Dann gibt es ein $\mathfrak{G}^*$-abgeschlossenes Ideal $V \neq 0$ in U mit natürlicher Projektion $p: U \to V$, so daß $p(\mathcal{F})$ eine in V voll-

ständige kollineare Familie ist und es im Falle $V \neq U$ in $V^{\perp}$ eine kollineare Familie $\mathcal{G}$ von abelschen und in $V^{\perp}$ vollständigen Tripotenten mit $(1-p)(\mathcal{F}) \subsetneq \mathcal{G}$ gibt. Insbesondere ist V vom Typ $I_{1,n}$ für eine Kardinalzahl n.

Beweis: Ist $\mathcal{F}$ vollständig, so ist nichts zu zeigen. Ist $\mathcal{F}$ nicht vollständig, so gibt es ein in $\bigcap_{h \in \mathcal{F}} U_{1/2}(h) \neq 0$ vollständiges Tripotent g (3.14). Sei $e \in \mathcal{F}$. Weil e in U vollständig ist, ist $U_1(g) = Q(g)U \subset U_{1/2}(e)$ nach (1.13). Nach (1.24) ist dann $f := 2\{gg^*e\}$ eine e-Projektion mit $f \top g$. Weil e abelsch ist, ist f eine e-zentrale Projektion. Sei $V := U(e-f)$.
Es ist $(1-p)(e) = f$ (5.2). Nach Wahl von g und wegen $g \in V^{\perp} = (1-p)(U)$ ist $g \in U_{1/2}((1-p)(h))$ für alle $h \in \mathcal{F}$. Ferner ist $(1-p)(e) \top (1-p)(h)$ für alle $h \in \mathcal{F}$ mit $h \neq e$. Nach [Mc,1.1] gibt es dann involutorische Automorphismen A_h in $V^{\perp}$ mit $A_h((1-p)(e)) = (1-p)(h)$, $A_h(g) = -g$. Daher ist $g \top (1-p)(h)$ für alle $h \in \mathcal{F}$. Aus der Maximalität von $\mathcal{F}$ folgt dann $p \neq 0$.
Dann ist $\bigcap_{h \in \mathcal{F}} V_{1/2}(p(h)) = \bigcap_{h \in \mathcal{F}} U_{1/2}(h) \cap V = 0$, weil $g \in V^{\perp}$ und g vollständig in $\bigcap_{h \in \mathcal{F}} U_{1/2}(h)$ ist. Damit ist $p(\mathcal{F})$ in V vollständig und $\mathcal{G} := (1-p)(\mathcal{F}) \cup \{g\}$ leistet das Gewünschte. Qed

(9.2.5) Lemma Sei U ein JBW^*-Tripel vom Typ $I_{1,k}$ (k eine Kardinalzahl), seien $m,n \in \mathbb{N}$, $m \leq n \leq k$.
Dann läßt sich jede kollineare Familie $\mathcal{E}$ von m abelschen, vollständigen Tripotenten in U zu einer ebensolchen Familie $\mathcal{F}$ von mindestens n Tripotenten ergänzen. Ist $n = k$, so ist jedes solche $\mathcal{F}$ vollständig, und es gilt $\operatorname{card} \mathcal{F} = n$.

Beweis: Sei $\mathcal{F}$ eine bezüglich der Inklusion maximale kollineare Familie von Tripotenten mit $\mathcal{E} \subset \mathcal{F}$, (die nach Zorn existiert). Alle Tripotente in $\mathcal{F}$ sind abelsch und voll-

ständig,weil diejenigen in $\mathcal{E}$ es sind und es Austauschautomorphismen gemäß [Mc,1.1] gibt.
Seien $V \neq 0, p, \mathcal{G}$ gewählt wie in (9.2.4).V und $V^{\perp}$ sind wieder vom Typ $I_{1,k}$.Also ist card $\mathcal{F} \geq n$ wegen (9.2.3) und der Vollständigkeit von $p(\mathcal{F})$ in V.Ist $V \neq U$,so erhält man durch Anwendung von (9.2.4) auf $V^{\perp}$ und eine $\mathcal{G}$ enthaltende,in $V^{\perp}$ (bezüglich der Inklusion) maximale kollineare Familie ein $\mathfrak{S}^*$-abgeschlossenes Ideal $0 \neq W \subset V^{\perp}$ vom Typ $I_{1,1}$ für ein $1 \geq n+1$.Ist also $n = k$,so ist wegen (9.2.3) $V = U$ und card $\mathcal{F} = n$. Qed

(9.2.6) Satz Sei U ein JBW*-Tripel vom Typ I_1 bezüglich eines (abelschen) vollständigen Tripotents e.
Dann ist U isometrisch isomorph zu $\oplus^{\infty}_{m \in M} U_m$ für $\mathfrak{S}^*$-abgeschlossene Ideale U_m mit natürlicher Projektion p_m,so daß sich für jedes $m \in M$ $p_m(e)$ zu einer in U_m vollständigen kollinearen Familie von m abelschen Tripotenten ergänzen läßt.(Dabei ist M eine Menge von Kardinalzahlen.) Insbesondere ist U_m vom Typ $I_{1,m}$.

Beweis: Sei $(V_i)_{i \in I}$ eine maximale orthogonale Familie von $\mathfrak{S}^*$-abgeschlossenen Idealen in U mit natürlichen Projektionen p_i,so daß sich für jedes $i \in I$ $p_i(e)$ für geeignete m_i zu einer in U_i vollständigen kollinearen Familie von m_i abelschen Tripotenten ergänzen läßt.Durch Anwendung von (9.2.4) auf eine e enthaltende,maximale kollineare Familie in U sieht man,daß $(V_i)_{i \in I}$ nicht leer ist.Nach (5.2)(7) ist $\sum_{i \in I} V_i$ ein zu $\oplus^{\infty}_{i \in I} V_i$ isomorphes, $\mathfrak{S}^*$-abgeschlossenes Ideal in U,und wegen der Maximalität der Familie und (9.2.4) ist $\sum_{i \in I} V_i = U$.Sei $M := \{m_i \mid i \in I\}$.
$U_m := \oplus^{\infty}_{m=m_i} V_i$ hat die gewünschte Eigenschaft,da für vollständige kollineare Familien $(e_{ik})_{k \in K}$ von card $K = m$ Tripotenten in V_i ($\sum_{m=m_i} e_{ik})_{k \in K}$ eine vollständige kollineare

Familie in U_m ist. Qed

(9.2.7) Def Eine vollständige orthogonale Familie $(e_j)_{j\in J}$ von Tripotenten in einem JBW*-Tripel U heiße m-homogen, (m eine Kardinalzahl),wenn es für alle $j \in J$ in dem Untertripel $U_{jj} + U_{jo}$ (siehe (1.20)) eine e_j enthaltende,vollständige kollineare Familie von m abelschen Tripotenten gibt.
Insbesondere ist dann $U_{jj} + U_{jo}$ vom Typ $I_{1,m}$.

(9.2.8) Ist $V \neq 0$ ein σ^*-abgeschlossenes Ideal in U mit natürlicher Projektion p,so ist $(p(e_j))_{j\in J}$ eine m-homogene vollständige orthogonale Familie von Tripotenten in V.

Ist $(e_i)_{i\in I}$ eine vollständige orthogonale Familie abelscher Tripotente in einem JBW*-Tripel U,so ist $U_{ii} + U_{io}$ ein Untertripel vom Typ I_1.Fordert man zusätzlich $U(e_i) = U$, so kann man aus (9.2.6) eine Zerlegung von U in eine Summe von Idealen mit homogenen orthogonalen Familien erhalten. Wir benötigen dazu zunächst:

(9.2.9) Lemma Sei A eine JBW*-Algebra,f eine abelsche Projektion in A mit zentralem Träger 1,$(f_m)_{m\in M}$ eine orthogonale Familie von Projektionen in A mit $\sum_{m\in M} f_m = f$.
Dann gibt es eine eindeutig bestimmte orthogonale Familie $(z_m)_{m\in M}$ zentraler Projektionen in A mit $z_m f = f_m$ und $\sum_{m\in M} z_m = 1$.

Beweis: Sei Z das Zentrum von A.Nach [H,5.2.17] ist $U_1(f) = Zf$.Daher gibt es zu $m \in M$ ein $z_m \in Z$ mit $z_m f = f_m$ und $z_m = z_m^*$.$A_m := \{a \in A \mid z_m a = z_m^2 a\}$ ist ein σ^*-abgeschlossenes $*$-Ideal in A mit $f \in A$ wegen $z_m f = f_m = f_m^2 = z_m^2 f$.Daher ist $A_m = A$ und z_m ist Projektion.Genauso erhält man die Eindeutigkeit von z_m.Für $m,n \in M, m \neq n$ ist $z_n z_m f = f_n f_m = 0$.

Wieder mit demselben Argument folgt $z_n z_m = 0$. Aus $f_m \leq z_m$ für alle $m \in M$ folgt schließlich $f = \sum_{m\in M} f_m \leq \sum_{m\in M} z_m$, also $\sum_{m\in M} z_m = 1$. Qed

(9.2.10) Lemma Sei U ein JBW*-Tripel, f ein abelsches Tripotent in U mit $U(f) = U$, $(f_m)_{m\in M}$ eine orthogonale Familie von Tripotenten mit $\sum_{m\in M} f_m = f$.
Dann ist U isomorph zu $\oplus^{\infty}_{m\in M} U(f_m)$.

Beweis: Man wähle ein vollständiges Tripotent e in U, so daß f eine e-Projektion ist (3.14). Für alle $m \in M$ ist f_m eine f-Projektion (3.15), also auch eine e-Projektion, was man mit (1.13)(1) zeigt. Wegen $U = U(f)$ ist nach (5.2) e der zentrale Träger von f in der JBW*-Algebra $U_1(e)$. Nach (9.2.9) gibt es daher eine orthogonale Familie $(z_m)_{m\in M}$ von e-zentralen Projektionen mit $\{z_m e^* f\} = f_m$ und $\sum_{m\in M} z_m = e$. Es ist $U(f_m) \subset U(z_m)$ und nach (5.2)(4) ist $U(z_m) \cap U(z_n) = 0$ für $n \neq m$. Schließlich ist $f \in \sum_{m\in M} U(f_m)$, also $U = \overline{\sum_{m\in M} U(f_m)}$, woraus die Behauptung mit (5.2)(7) folgt. Qed

(9.2.11) Lemma Sei U ein JBW*-Tripel, $(e_j)_{j\in J}$ eine vollständige orthogonale Familie von abelschen Tripotenten mit $U(e_j) = U$ für alle $j \in J$. Dann gibt es für alle $j,k \in J$ einen Automorphismus $A = A_{j,k}$ von U mit $A(e_j) = e_k$, $A(e_k) = e_j$ und $A(e_l) = e_l$ für $l \neq j,k$.

Beweis: Sei $e := \sum_{j\in J} e_j$. e ist ein vollständiges Tripotent und e_j ist eine e-Projektion für alle $j \in J$ (3.15). Wegen $U(e_j) = U$ und (5.2) ist e der zentrale Träger von e_j in $U_1(e)$. Zwei abelsche Projektionen in einer JBW*-Algebra mit übereinstimmendem zentralem Träger sind stark verbunden [H, 5.3.2(ii) und 5.2.8]. Dann folgt die Behauptung aus [Ka3, 2.7]. Qed

(9.2.12) Satz Sei U ein JBW*-Tripel, $(e_j)_{j\in J}$ eine vollständige orthogonale Familie von abelschen Tripotenten in U mit $U(e_j) = U$ für alle $j \in J$.
Dann ist U isomorph zu $\oplus^\infty_{m\in M} U_m$ für $\mathfrak{S}^*$-abgeschlossene Ideale U_m mit natürlichen Projektionen p_m, so daß $(p_m(e_j))_{j\in J}$ eine m-homogene orthogonale Familie in U_m ist für alle $m \in M$.

Beweis: Sei $k \in J$. e_k ist ein in $U_{kk} + U_{ko}$ abelsches und vollständiges Tripotent und $U_{kk} + U_{ko}$ ist vom Typ I_1 bezüglich e_k. Daher gibt es nach (9.2.6) und (5.2) eine orthogonale Familie $(f_m)_{m\in M}$ von e_k-Projektionen mit $\sum_{m\in M} f_m = e_k$, so daß es in dem von f_m in $U_{kk} + U_{ko}$ erzeugten $\mathfrak{S}^*$-abgeschlossenen Ideal $(U_{kk} + U_{ko})(f_m)$ eine f_m enthaltende, vollständige kollineare Familie von m - notwendig abelschen - Tripotenten gibt. Sei $U_m := U(f_m)$, p_m die natürliche Projektion. Nach (9.2.10) ist U isomorph zu $\oplus^\infty_{m\in M} U_m$ und es ist $p_m(e_k) = f_m$.
Nach (5.2)(1) ist $(U_{kk} + U_{ko})(f_m) =$
$= U_1(f_m) \oplus U_{1/2}(f_m) \cap (U_{kk} + U_{ko}) = U_1(f_m) \oplus U_{1/2}(f_m) \cap U_{ko}$.
Ferner gilt für die bezüglich der vollständigen orthogonalen Familie $(p_m(e_j))_{j\in J}$ in U_m gebildeten Peirce-Räume:
$(U_m)_{kk} = U_1(f_m)$ und $(U_m)_{ko} = U_{1/2}(f_m) \cap U_m \cap U_{ko} =$
$= U_{1/2}(f_m) \cap U_{ko}$.
Eine Anwendung von (9.2.11) auf $(p_m(e_j))_{j\in J}$ liefert dann die Behauptung. Qed

§ 9.3 Typ $I_{2,n}$

Das Ergebnis dieses Abschnitts lautet:

(9.3.1) Satz Sei U ein JBW*-Tripel vom Typ $I_{2,n}$ $(n \geq 2)$ bezüglich eines vollständigen Tripotents e.Dann gilt:

(1) Ist $n \neq 3,5,7$,so ist e unitär.

(2) Ist $n = 3$,so ist U vom rechteckigen Typ bezüglich e.

(3) Ist $n = 5$,so ist U isometrisch isomorph zu $L^\infty(T_1,\mu_1,C_4^2) \oplus^\infty L^\infty(T_2,\mu_2,C_5^2)$ für geeignete lokalkompakte Räume T_i mit positiven Radonmaßen μ_i $(i = 1,2)$.Enthält ferner U eine m-homogene vollständige orthogonale Familie (e_1,e_2) von Tripotenten mit $e_1+e_2 = e$,so ist $m = 1$ oder $m = 3$.

(4) Ist $n = 7$,so ist U isometrisch isomorph zu $L^\infty(T_1,\mu_1,C_8^4) \oplus^\infty L^\infty(T_2,\mu_2,C^5)$ für geeignete lokalkompakte Räume T_i mit positiven Radonmaßen μ_i $(i = 1,2)$.

Der Beweis gliedert sich in mehrere Schritte:

(9.3.2) Ist U ein JBW*-Tripel vom Typ $I_{2,n}$ bezüglich eines vollständigen Tripotents e und ist $V \neq 0$ ein σ^*-abgeschlossenes Ideal in U mit natürlicher Projektion p,so ist V ein JBW*-Tripel vom Typ $I_{2,n}$ bezüglich p(e) nach (6.26),(6.27) und (5.2).

(9.3.3) Man kann im folgenden also wegen (9.2.12) und (9.3.2) voraussetzen,daß es in U für eine Kardinalzahl m eine m-homogene orthogonale Familie (e_1,e_2) von abelschen Tripotenten mit $e_1+e_2 = e$ und $U(e_1) = U(e_2) = U$ gibt.

(9.3.4) Ist $m = 1$,so ist offenbar e unitär.

(9.3.5) Lemma Ist $m>1$, so gibt es eine Zerlegung von U in orthogonale $\mathfrak{G}^*$-abgeschlossene Ideale U' und U'' mit folgenden Eigenschaften:
Bezeichnen p' bzw. p'' die natürlichen Projektionen von U auf U' bzw. U'' und U_{ij}' (i,j = 0,1,2) die Peirce-Räume bezüglich $(p'(e_1),p'(e_2))$ in U', so gibt es in U_{1o}' ein in $(U')_{1/2}(p'(e))$ vollständiges Tripotent f_1' mit $f_1' \top p'(e_1)$ und in $(U'')_{1/2}(p''(e))$ ein in U'' vollständiges Tripotent.

Beweis: Wegen $m>1$ gibt es in U_{1o} ein Tripotent f_1 mit $f_1 \top e_1$. Ist f_1 vollständig in $U_{1/2}(e)$, so setze man U = U', U'' = 0. Andernfalls gibt es ein in $U_{1/2}(e) \cap U_o(f_1)$ vollständiges Tripotent f_2. Da f_1 vollständig in U_{1o} ist und f_1, e_1 und e_2 verträglich sind, ist $f_2 \in U_{2o}$.
Es ist $U_1(f_2) = Q(f_2)U \subset U_{2o}$ nach (1.21). Nach (1.24) ist dann $e_2'' := 2\{f_2 f_2^* e_2\}$ eine e_2-Projektion mit $f_2 \top e_2''$.
Sei $e_2' := e_2 - e_2''$. Nach (9.2.10) ist dann $U = U' \oplus U''$ für $U' := U(e_2')$, $U'' := U(e_2'')$.
Seien $e_1'' := p''(e_1)$, $f_i'' := p''(f_i)$ (i = 1,2), $f'' := f_1'' + f_2''$. Dann ist $f_i'' \top e_i''$ (i = 1,2), $f_1'' \top e_2''$, $f_2'' \top e_1''$, also sind f'' und p''(e) kollinear. Da p''(e) in U'' vollständig ist, ist dies wegen der Existenz von Austauschautomorphismen [Mc,1.1] auch f''.
Sei $f_1' := p'(f_1)$. Es ist $f_1' \in U_{1o}'$ und
$(U')_o(f_1') \cap (U')_{1/2}(p'(e)) = p'(U_o(f_1) \cap U_{1/2}(e)) \subset p'(U(f_2)) = 0$, also ist f_1' vollständig in $(U')_{1/2}(p'(e))$. Qed

(9.3.6) Lemma Sei $m>1$ und U = U' in (9.3.5).
Dann ist m = 2, n = 3 und U vom rechteckigen Typ, oder es ist m = 3, n = 5 und U ist isomorph zu $L^\infty(T,\mu,C_5^2)$ für geeignete T,μ.

Beweis: Für kollineare Tripotente g,h bezeichne $T_{g,h}$ den Austauschautomorphismus von g und h gemäß [Mc,1.1]. Nach Voraussetzung gibt es in U_{1o} ein in $U_{1/2}(e)$ vollständiges

Tripotent f_1 mit $f_1 \top e_1$.

Sei $m \geq 3$: Nach (9.2.5) gibt es dann Tripotente $f_2, f_3 \in U_{1o}$, so daß e_1, f_1, f_2, f_3 paarweise streng kollinear sind. Dann sind auch f_2 und f_3 vollständig in $U_{1/2}(e)$, und es ist $U_{2o} \subset U_{1/2}(f_i)$ wegen der Verträglichkeit von e_j und f_i $(j = 1,2, i = 1,2,3)$.

Für $i,j = 1,2,3, i \neq j$, sei $S_{ij} := T_{e_1,f_i} \circ T_{f_i,f_j}$.

Mit [Mc,1.1] berechnet man: $S_{ij}(e_1) = -f_i, S_{ij}(f_i) = -f_j$, $S_{ij}(f_j) = e_1, S_{ij}(f_1) = f_1$ $(1 \neq i,j)$ und $S_{ij}(e_2) = e_2$.
Es ist $U_{2o} = U_{2o} \cap U_{1/2}(f_j) = U_{2o} \cap U_{1/2}(f_i) \cap U_{1/2}(f_j)$, also $S_{ij}(U_{2o}) = U_{12} \cap U_o(f_i) = U_{12} \cap U_{1/2}(f_j) \cap U_o(f_i)$, d.h. wegen der Verträglichkeit von e_1, e_2, f_i, f_j, daß $U_{12} \cap U_o(f_j) \cap U_o(f_i) = 0$ ist.
$Q(e)$ ist eine (antilineare) Bijektion von $U_1(e)$ auf sich mit $Q(e)\big|_{U_{12}} = 2Q(e_1,e_2)$ und es ist

$$Q(e_1,e_2)(U_{12} \cap U_{1/2}(f_i) \cap U_{1/2}(f_j)) \subset U_{12} \cap U_o(f_i) \cap U_o(f_j) = 0$$

nach (1.13), also

$U_{12} \cap U_{1/2}(f_i) \cap U_{1/2}(f_j) = 0$ und
$U_{12} \cap U_{1/2}(f_j) = U_{12} \cap U_{1/2}(f_j) \cap U_o(f_i) = U_{12} \cap U_o(f_i)$.
Dann ist aber $U_{12} \cap U_o(f_1) = U_{12} \cap U_{1/2}(f_2) = U_{12} \cap U_o(f_3) = U_{12} \cap U_{1/2}(f_1) = 0$, d.h. $U_{12} = 0$.
Dies ist ein Widerspruch zu $U = U(e_1)$.

Also ist $m = 2$ oder $m = 3$.

Sei $m = 2$: Nach (9.2.5) ist $U_1(f_1) = U_{1o}$. Wegen (9.2.11) gibt es in U_{2o} ein in $U_{1/2}(e)$ vollständiges Tripotent f_2 und es ist $e_2 \top f_2 \top f_1$. Sei $T := T_{e_2,f_2}$, sei $e_{12} := T(f_1) = -2\{e_2 f_2^* f_1\}$ [Mc,1.1]. Aus (8.1.3) folgt $f_1 \top e_{12} \top e_2$ und aus $T(e_1) = e_1$ folgt $e_{12} \top e_1$.
Man setze $e_{11} := e_1, e_{22} := e_2, e_{21} := 2\{e_{11} e_{12}^* e_{22}\}$.
Nach (8.1.3) ist $(e_{11}, e_{12}, e_{22}, e_{21})$ ein Viereck. Es ist
$U_1(e_{12}) = T(U_1(f_1)) = T(U_{1o} \cap U_{1/2}(f_2)) = U_{12} \cap U_o(f_2)$.
$U_1(e_{21}) = Q(e)U_1(e_{12}) = Q(e)(U_{12} \cap U_o(f_2)) = U_{12} \cap U_{1/2}(f_2)$ nach (1.13). Damit ist $U_{12} = U_1(e_{12}) \oplus U_1(e_{21})$, und $(e_{11}, e_{12}, e_{22}, e_{21})$ ist ein überdeckendes rechteckiges Gitter

in $U_1(e)$.Nach (8.1.15) ist $U_1(e)$ isomorph zu $L^\infty(T,\mu,C_{22}^1)$ für geeignete T,μ und U ist vom rechteckigen Typ bezüglich e.Nach [Lo2,4.18(5)] ist C_{22}^1 isomorph zu C_4^4,also ist $U_1(e)$ $*$-isomorph zu einer JBW*-Algebra vom Typ $I_{2,3}$,und mit (6.28) folgt n = 3.

Sei m = 3: Hier ist es möglich,in U ein überdeckendes antisymmetrisches Gitter zu finden.Nach (9.2.5) gibt es ein $f_2 \in U_{1o}$,so daß e_1,f_1,f_2 paarweise streng kollinear sind, insbesondere ist dann mit f_1 auch f_2 vollständig in $U_{1/2}(e)$. Es ist also $U_{1o} = U_1(f_1) \oplus U_1(f_2)$.Nach (9.2.11) gibt es in U_{2o} ein in $U_{1/2}(e)$ vollständiges Tripotent f_3 mit $f_3 \top e_2$. Es ist dann $f_1 \top f_2 \top f_3 \top f_1$.Man setze:
$f_{io} := f_i$ $(i = 1,2,3)$,$f_{12} := e_1$,$f_{34} := e_2$.
Nach (8.2.8) können diese Tripotente zu einem antisymmetrischen Gitter $(f_{ij})_{0\le i<j\le 4}$ in U ergänzt werden.
Es ist $U_1(f_{14}) \oplus U_1(f_{24}) = T_{f_{34},f_{3o}}(U_1(f_{1o}) \oplus U_1(f_{2o}))$
$= T_{f_{34},f_{3o}}(U_{1o}) = U_{12} \cap U_o(f_{3o})$ und
$U_1(f_{31}) \oplus U_1(f_{32}) = Q(e)(U_1(f_{24}) \oplus U_1(f_{14})) =$
$= Q(e)(U_{12} \cap U_o(f_{3o})) = U_{12} \cap U_{1/2}(f_{3o})$ nach (8.2.8)(i),(ii) und (1.13).
Also ist $(f_{ij})_{1\le i<j\le 4}$ überdeckend in $U_1(e)$.
Aus (9.2.5) und m = 3 folgt noch $U_{2o} = U_1(f_{3o}) \oplus U_1(f_{4o})$, woraus man erhält,daß $(f_{ij})_{0\le i<j\le 4}$ überdeckend in U ist.
Aus (8.2.7) folgt,daß $U_1(e)$ isomorph zu $L^\infty(T,\mu,C_4^2)$ und U isomorph zu $L^\infty(T,\mu,C_5^2)$ für geeignete T,μ ist.
Nach [Lo2,4.18(6)] ist C_4^2 isomorph zu C_6^4,mit (6.28) folgt daher n = 5. Qed

(9.3.7) Lemma Sei $m > 1$ und U = U" in (9.3.5).
Dann ist n = 3 und U vom rechteckigen Typ oder n = 7,m = 5 und U ist isomorph zu $L^\infty(T,\mu,C^5)$ für geeignete T,μ.

Beweis: Nach Voraussetzung gibt es in $U_{1/2}(e)$ ein in U vollständiges Tripotent f.Dann ist $e \top f$. $V := U_1(e) \oplus U_1(f)$

ist ein $\mathfrak{S}^*$-abgeschlossenes Untertripel von U (1.13).Nach dem 1x2 - Koordinatisierungssatz [Mc,2.2] kann dann $U_1(e)$ mit der Struktur einer alternativen Algebra D mit Eins e und Involution versehen werden,so daß gilt:

(9.3.8) Es gibt einen Isomorphismus $\Psi: V \to M_{1,2}(D)$ mit $\Psi(U_1(e)) = (D,0)$,und D^J (die Jordanifizierung von D) stimmt überein mit der Jordan - $*$- Algebra $U_1(e)$.

Mit der Norm von $U_1(e)$ wird dann D^J zu einer JBW*-Algebra. Das Produkt auf D ist gegeben durch $ab = 4\{\{ae^*f\}f^*b\}$ nach [Mc,2.2(i)] ,daher stetig.Nach [Br2,(2.14)] ist dann D eine alternative W*-Algebra.

Nach [P,6.11 und 3.9] gibt es daher in D zentrale Projektionen z_1,z_2 mit $z_1+z_2 = e$,so daß z_1D assoziativ ist und z_2D rein alternativ.

Seien $U_i := U(z_i)$,p_i die natürlichen Projektionen von U auf U_i,$V_i := p_i(V)$ für $i = 1,2$.Dann sind U_i $(i = 1,2)$ JBW*-Tripel vom Typ $I_{2,n}$ bezüglich $z_i = p_i(e)$ mit m-homogenen orthogonalen Familien $(p_i(e_1),p_i(e_2))$ (nach (9.3.2) und (9.2.8)), und es gilt $p_i(e) \top p_i(f)$,$V_i = (U_i)_1(p_i(e)) \oplus (U_i)_1(p_i(f))$, und V_i ist isomorph zu $M_{1,2}(z_iD)$.

Ist $z_1 \neq 0$,so ist z_1D eine (assoziative) W*-Algebra vom Typ I_2,daher ist z_1D $*$-isomorph zu $L^\infty(T_1,\mu_1,\mathcal{L}(\mathbb{C}^2))$ für geeignete T_1,μ_1 (siehe z.B. [Ta,V1.27]).U_1 ist also vom rechteckigen Typ,und es ist $n = 3$,weil $\mathcal{L}(\mathbb{C}^2)^J$ vom Typ $I_{2,3}$ ist.

Ist $z_2 \neq 0$,so ist z_2D $*$-isomorph zu $\mathcal{C}(X,\mathbb{O})$ für einen hyperstoneschen Raum X nach (7.2),und es ist $n = 7$.

Wegen (6.28) gilt also entweder $z_1 = 0$ oder $z_2 = 0$.

Ist $z_2 = 0$,so ist nichts weiter zu zeigen.

Für $z_2 \neq 0$ ist V_2 isomorph zu $M_{1,2}(\mathcal{C}(X,\mathbb{O})) = \mathcal{C}(X,M_{1,2}(\mathbb{O}))$ $= L^\infty(T_2,\mu_2,C^5)$ für T_2,μ_2 so,daß $\mathcal{C}(X)$ $*$-isomorph ist zu $L^\infty(T_2,\mu_2)$. Es ist noch zu zeigen:$(V_2 =)$ $V = U$ $(= U_2)$ und $m = 5$.

Sei $W := U_{1/2}(f) = U_1(e) \oplus U_{1/2}(e) \cap U_{1/2}(f)$.Nach (1.13) ist W ein $\mathfrak{S}^*$-abgeschlossenes Untertripel von U vom Typ $I_{2,7}$ be-

züglich e.Nach (9.2.12) ist W isomorph zu $\oplus_{k\in K}^{\infty} W_k$ für σ^*-abgeschlossene Ideale W_k in W mit natürlicher Projektion q_k,so daß $(q_k(e_1),q_k(e_2))$ eine k-homogene orthogonale Familie in W_k ist.W_k ist vom Typ $I_{2,7}$ bezüglich $q_k(e)$ oder ist gleich 0 (9.3.2).

Angenommen,es ist $W_k \neq 0$ für ein $k>1$.Sei $W_k = W_k' \oplus W_k''$ die Zerlegung von W_k gemäß (9.3.5).Da auch W_k' vom Typ $I_{2,7}$ oder gleich 0 ist,folgt aus (9.3.6): $W_k' = 0$.Also gibt es in $(W_k)_{1/2}(q_k(e)) = U_{1/2}(q_k(e)) \cap U_{1/2}(f)$ ein in W_k vollständiges Tripotent g.Es ist dann $q_k(e) \top g$.

Sei nun r_k die natürliche Projektion von U auf $U(q_k(e))$ $(= U_1(q_k(e)) \oplus U_{1/2}(q_k(e))$ nach (5.2)).Dann ist $r_k|_W = q_k$, $r_k(f) \top r_k(e)$ $(= q_k(e))$,$g \in U_{1/2}(r_k(f))$.Nach (1.22) sind dann $r_k(e)$,$r_k(f)$ und g paarweise streng kollinear.Aus dem Koordinatisierungssatz (8.1.7),angewandt auf das Untertripel $U_1(r_k(e)) \oplus U_1(r_k(f)) \oplus U_1(g)$,folgt dann,daß $U_1(r_k(e))$ mit einem assoziativen Produkt versehen werden kann,das mit dem von D $(= U_1(e))$ induzierten übereinstimmt. $U_1(r_k(e))$ ist dann ein komplementiertes,assoziatives Ideal in D,im Widerspruch dazu,daß D rein alternativ ist.

Also ist $W_k = 0$ für alle $k>1$,und e ist unitär in W,d.h es ist $U_{1/2}(e) \cap U_{1/2}(f) = 0$ und $U = U_1(e) \oplus U_1(f) = V$.

Es bleibt noch "m = 5" zu zeigen:

e_1 und e_2 sind in $D^J = U_1(e)$ stark verbunden durch eine Symmetrie s [H,5.3.2(ii) und 5.2.8].Es ist dann $s = ese = (e_1s)e_2 + (e_2s)e_1$ wegen $s \in U_{1/2}(e_1) \cap U_{1/2}(e_2)$.$t := e_1 - e_2$ ist eine Symmetrie mit $tst = -(e_1s)e_2 - (e_2s)e_1 = -s$,also ist $ts + st = 0$,und t ist eine zu s orthogonale Symmetrie.

Nach (7.10) kann dann ein $\star$-Isomorphismus $\varphi: D \longrightarrow \mathcal{C}(X,\mathbb{C})$ so gewählt werden,daß $\varphi(\{s,t\}) \subset \mathbb{C}$ und somit auch $\varphi(\{e_1,e_2\}) \subset \mathbb{C}$ ist. $\Phi := (\varphi,\varphi)\circ\Psi$ (mit Ψ aus (9.3.8)) ist dann ein Isomorphismus von U auf $M_{1,2}(\mathcal{C}(X,\mathbb{C}))$ mit $\Phi(\{e_1,e_2\}) \subset (\mathbb{C},0)$.Da $M_{1,2}(\mathbb{C})$ ein Faktor ist,folgt mit (9.2.12),daß $(\Phi(e_1),\Phi(e_2))$ für eine Kardinalzahl k eine k-homogene orthogonale Familie in $M_{1,2}(\mathbb{C})$ ist.Aus Dimen-

sionsgründen ist k = 5.Damit ist $(\Phi(e_1), \Phi(e_2))$ auch in $M_{1,2}(\mathcal{C}(X, \mathbb{O}))$ 5-homogen und somit (e_1, e_2) in U 5-homogen. Mit (9.2.3) folgt k = m = 5. Qed

Beweis von (9.3.1): Man zerlege U gemäß (9.2.12) in eine direkte Summe von Idealen U_m (vom Typ $I_{2,n}$) mit m-homogenen orthogonalen Familien wie in (9.3.3).Die Zerlegung $U_m = U_m' \oplus U_m''$ gemäß (9.3.5) liefert nach (9.3.2) und (9.2.8) wieder Ideale dieser Bauart.

Ist daher n = 3,5,7,so folgt aus (9.3.6) und (9.3.7) $U_m = 0$ für $m > 1$,d.h. $U = U_1$,und e ist unitär.

Ist n = 3,so ist U wegen (9.3.6),(9.3.7) und weil der vierdimensionale Spinfaktor $*$-isomorph zu A_2^1 ist,vom rechtekkigen Typ bezüglich e.

Ist n = 5,so ist $U = U_1 \oplus U_3$ wegen (9.3.6) und $C_6^4 = C_4^2$ isomorph zu $L^\infty(T_1, \mu_1, C_4^2) \oplus^\infty L^\infty(T_2, \mu_2, C_5^2)$ für geeignete T_i, μ_i $(i = 1,2)$.

Ist n = 7,so ist $U = U_1 \oplus U_5$ isomorph zu $L^\infty(T_1, \mu_1, C_8^4) \oplus^\infty L^\infty(T_2, \mu_2 C^5)$ für geeignete T_i, μ_i $(i = 1,2)$ nach (9.3.7).

Nach (2.11) ist schließlich jeder Tripelisomorphismus eine Isometrie. Qed

§ 9.4 Der rechteckige Typ

(9.4.1) Satz Sei U ein JBW*-Tripel vom rechteckigen Typ bezüglich eines vollständigen Tripotents e.
Dann ist U isometrisch isomorph zu $\bigoplus_{l\in L}^{\infty} L_w^\infty(T_l,\mu_l,\mathbb{C}^1_{nm_l})$ für geeignete lokalkompakte Räume T_l mit positiven Radonmaßen μ_l und Kardinalzahlen n,m_l mit $n\le m_l$ $(l\in L)$.

Beweis: $U_1(e)$ ist nach Voraussetzung $*$-isomorph zu $L_w^\infty(T,\mu,\mathcal{L}(H))$ für geeignete T,μ und einen Hilbertraum H.
Nach (8.1.14) enthält $U_1(e)$ ein vollständiges rechteckiges Gitter $\mathcal{E}=(e_{ij})_{i,j\in I}$ von abelschen Tripotenten mit $e=\sum_{i\in I} e_{ii}$.
Sei $k,l\in I$. Für alle $i,j\in I$ ist $e_{ij}\in\tilde{U}(e_{kl})$ nach Definition eines rechteckigen Gitters. Für das in $U_1(e)$ zu $U_1(e)\cap U(e_{kl})$ komplementäre Ideal W gilt daher $Q(e_{ij})W=0$ für alle $i,j\in I$, d.h. $W=0$ wegen der Vollständigkeit von $\mathcal{E}$ in $U_1(e)$.
Damit ist $U=U(e_{kl})$.
(9.4.2) Ist $V\neq 0$ ein $*$-abgeschlossenes Ideal in U mit natürlicher Projektion q, so ist $q(e)$ ein in V vollständiges Tripotent, und $(q(e_{ij}))_{i,j\in I}$ ist ein vollständiges rechteckiges Gitter abelscher Tripotente in $V_1(q(e))$ mit $q(e)=\sum_{i\in I} q(e_{ii})$.
(9.4.3) Wegen (9.2.11) und (9.4.2) kann man also im folgenden annehmen, daß $(e_{ii})_{i\in I}$ eine 1-homogene vollständige orthogonale Familie von abelschen Tripotenten in U ist (für ein geeignetes 1).
(9.4.4) Sei $n:=\operatorname{card} I$, $m:=n+1-1$. Dann ist U isomorph zu $L_w^\infty(T,\mu,\mathbb{C}^1_{nm})$ für geeignete T,μ:
Für $1=1$ ist nichts zu beweisen.
Sei $1>1$. Für $n=1$ folgt die Behauptung aus (9.2.2). Sei daher auch $n>1$.
Nach (8.1.15) genügt es zu zeigen, daß U ein vollständiges rechteckiges Gitter $\mathcal{F}=(f_{ij})_{i,j\in I}$ aus abelschen Tripotenten

mit card J = m enthält.Es ist nun im allgemeinen nicht möglich,das Gitter $\mathcal{E}$ zu einem vollständigen rechteckigen Gitter $\mathcal{F}$ in U zu ergänzen.Wir benützen daher zur Konstruktion von $\mathcal{F}$ einen Rahmen und (8.1.12).

Sei $f_{ii} := e_{ii}$ $(i \in I)$,seien U_{ij} die Peirce-Räume bezüglich $(f_{ii})_{i\in I}$ $(i,j \in I \cup \{0\})$.

(9.4.5)Sei $r \in I$.Nach (9.4.3) gibt es eine in U_{ro} vollständige kollineare Familie $(f_{rk})_{k\in K}$ von (notwendig abelschen) Tripotenten mit $I \cap K = \emptyset$ und $f_{rr} \top f_{rk}$ für alle $k \in K$.

Sei $t \in K$.Für $i \in I, i \neq r$,sei $V_p^i := U_{ri} \cap U_p(f_{rt})$ $(p = 0,1/2)$.

Man wähle ein in $V_{1/2}^i$ vollständiges Tripotent f_{ri} und setze $f_{ir} := 2\{f_{ii}f_{ri}f_{rr}\}$,$J := I \cup K$.

Es wird nun gezeigt,daß $\mathcal{R} := ((f_{ir})_{i\in I},(f_{rj})_{j\in J})$ ein Rahmen in U ist.Die Verträglichkeit von Tripotenten (1.17) wird im folgenden häufig benützt,ohne daß dies ausdrücklich angegeben wird.

(9.4.6) Für alle $i \in I, i \neq r$,ist $(f_{ii},f_{ri},f_{rr},f_{ir})$ ein Viereck,und es ist $U_1(f_{ii} + f_{rr}) = \bigoplus_{k,l\in\{i,r\}} U_1(f_{kl})$:

Es gilt $U_{ri} = V_{1/2}^i \oplus V_o^i$ wegen $U_1(f_{rt}) \subset U_{ro}$.Nach (1.23) ist $U_1(f_{ri}) = Q(f_{ri})U \subset U_1(f_{rr} + f_{ii}) = U_{rr} + U_{ri} + U_{ii} \subset U_1(e)$; es ist $Q(f_{ri})U_{rr} \subset U_{1/2}(f_{rt}) \cap U_{ii} = 0$ wegen $f_{ii} \perp f_{rt}$,genauso erhält man $Q(f_{ri})U_{ii} = 0$ (mit (1.13),(1.21)),also ist $U_1(f_{ri}) \subset U_{ri}$.

$U_1(f_{ri}) \cap U_1(f_{rt}) \subset U_1(e) \cap U_{1/2}(e) = 0$,

$Q(f_{ri})U_o(f_{rt}) \subset U_1(f_{rt}) \cap U_{ri} = 0$,daher ist

$U_1(f_{ri}) \subset U_{1/2}(f_{rt}) \cap U_{ri} = V_{1/2}^i$.

Das Gitter $\mathcal{E}$ ist in $U_1(e)$ vollständig,und für alle $(k,l) \neq (i,r),(r,i)$ ist $U_{ri} \cap U_1(e_{kl}) = 0$,daher ist $U_{ri} = U_1(e_{ir}) \oplus U_1(e_{ri})$.Weil e_{ir} und e_{ri} abelsch sind und $e_{ir} \perp e_{ri}$ ist,folgt mit (1.13)(1),daß U_{ri} ein abelsches Untertripel ist.Da dann auch $V_{1/2}^i$ abelsch ist und da f_{ri} vollständig in $V_{1/2}^i$ ist,folgt $V_{1/2}^i = U_1(f_{ri})$.

$A := Q(f_{rr}+f_{ii})$ ist auf $U_1(f_{rr} + f_{ii})$ ein antilinearer Isomorphismus mit $AV_{1/2}^i = 2Q(f_{rr},f_{ii})V_{1/2}^i = V_o^i$ und $Af_{ri} = f_{ir}$, daher ist f_{ir} ein Tripotent und $V_o^i = U_1(f_{ir})$.

Damit ist $U_1(f_{ii}+f_{rr}) = \bigoplus_{k,l\in\{i,r\}} U_1(f_{kl})$ gezeigt.
Sei $g := 2\{f_{ri}f_{ri}^*f_{rr}\}$. Nach (1.24) ist g eine f_{rr}-Projektion mit $g \top f_{ri}$. Das von g in $U_1(f_{rr}+f_{ii})$ erzeugte σ^*-abgeschlossene Ideal enthält f_{ri} und f_{ir}, daher U_{ri}, und ist somit gleich $U_1(f_{rr}+f_{ii})$. Aus (9.2.10) folgt dann $g = f_{rr}$.
Genauso folgt $f_{ii} \top f_{ri}$. Aus der Definition von f_{ir} und (9.1.3) folgt dann der Rest von (9.4.6).
Sei für kollineare f_{ij}, f_{kl} T_{ijkl} der Austauschautomorphismus gemäß [Mc,1.1].
(9.4.7) Für alle $i\in I$ ist $f_{ri} \top f_{rt}$:
Dies folgt aus $f_{ri} \top f_{rr} \top f_{rt}$, $f_{ri} \in U_{1/2}(f_{rt})$ und (1.22).
(9.4.8) Für alle $i,j\in I, i \neq j$, ist $f_{ri} \top f_{rj}$:
Wegen (9.4.6) kann man $r \neq i,j$ annehmen. Es ist $f_{rj} \in U_{1/2}(f_{rt}) \cap U_{rj}$ und $Q(f_{ri})f_{rj} = 0$ (1.21). Sei $W := U_0(f_{ri}) \cap U_{1/2}(f_{rt}) \cap U_{rj}$. Nach [Mc,1.1] ist $T_{riirt}(W) = -1(f_{ri} \sqcup f_{rr}^*)(W) = 0$ (1.21), also $W = 0$ und $f_{rj} \in U_{1/2}(f_{ri})$. Mit (9.4.7) und (1.22) folgt $f_{ri} \top f_{rj}$.
(9.4.9) Nach Definition ist $f_{rr} \top f_{rk} \top f_{rl}$ für alle $k,l\in K$, $k \neq l$.
(9.4.10) Für alle $i,j\in I, i \neq j$, $f_{ir} \top f_{jr}$:
$Q(e)$ ist ein antilinearer Isomorphismus von $U_1(e)$ mit $Q(e)f_{ri} = f_{ir}$ für alle $i\in I$. Daher folgt (9.4.10) aus (9.4.8).
(9.4.11) Für alle $i,j\in I, i \neq r \neq j$, ist $f_{ir} \perp f_{rj}$:
Für $i = j$ folgt dies aus (9.4.8), für $i \neq j$ ist $f_{ir} = 2\{f_{ii}f_{ri}^*f_{rr}\} \in U_0(f_{rj})$ (was aus (1.18) und (9.4.8) folgt).
(9.4.12) Für alle $i,j\in I, i \neq r \neq j$, ist $U_{1/2}(f_{ir}) \cap U_{1/2}(f_{rr}) \cap U_{1/2}(f_{rj}) = 0$:
Sei $i = j$: Dann ist $U_{1/2}(f_{ir}) \cap U_{1/2}(f_{ri}) \subset U_1(f_{ir}+f_{ri}) = U_1(f_{ii}+f_{rr})$ (nach (1.23)), und die Behauptung folgt aus (9.4.8).
Sei $i \neq j$: Nach [Mc,1.1] ist dann $T_{riri}(f_{rr}) = -f_{rr}$ und $T_{riri}(f_{ir}) = f_{ir}$ wegen (9.4.8) und (9.4.11), woraus die Behauptung folgt.
(9.4.13) Für alle $i\in I, i \neq r$, und alle $k\in K, k \neq t$, ist

$f_{ri} \top f_{rk}$:
Nach (9.4.9) ist $f_{rk} \in U_{ro} \cap U_{1/2}(f_{rt})$ und nach [Mc,1.1] und (1.21) ist $T_{rirt}(U_o(f_{ri}) \cap U_{1/2}(f_{rt}) \cap U_{ro}) \subset$
$\subset (f_{ri} \square f_{rt}^*)(U_{ro}) \cap U_{1/2}(f_{ri}) \subset \{U_{ri}U_{ro}^*U_{ro}\} \cap U_{1/2}(f_{ri}) =$
$= U_{ri} \cap U_{1/2}(f_{ri}) = 0$ nach (9.4.6).
Da ferner $Q(f_{ri})f_{rk} \in \{U_{ri}U_{ro}^*U_{ri}\} = 0$ (1.21) ist, ist $f_{rk} \in U_{1/2}(f_{ri})$. Aus (9.4.7) und (9.4.9) folgt $f_{ri} \top f_{rt} \top f_{rk}$ und mit (1.22) folgt $f_{ri} \top f_{rk}$.
(9.4.14) Für alle $i \in I, i \neq r$, und alle $k \in K$ ist $f_{ir} \perp f_{rk}$:
Aus (9.4.7) für $k = t$ und (9.4.13) für $k \neq t$ folgt mit (1.13): $f_{ir} = 2\{f_{ii}f_{ri}^*f_{rr}\} \in U_o(f_{rk})$.
(9.4.15) $U_{1/2}(f_{ir}) \cap U_{1/2}(f_{rr}) \cap U_{1/2}(f_{rk}) = 0$ für alle $r \neq i \in I, k \in K$ folgt durch Anwendung von T_{rirk} auf (9.4.12) (mit $i = j$).
Damit erfüllt $\mathfrak{R}$ die Bedingungen (8.1.10) für einen Rahmen (wobei in (8.1.10) $s = r$ gewählt ist). Das von $\mathfrak{R}$ gemäß (8.1.12) erzeugte rechteckige Gitter $\mathfrak{F} = (f_{ij})_{\substack{i \in I \\ j \in J}}$ besteht aus abelschen Tripotenten, denn f_{rr} ist abelsch, und für $i \in I, j \in J$ bildet der Automorphismus R_iC_j aus (8.1.11) f_{rr} auf f_{ij} ab.
Es ist noch zu zeigen, daß $\mathfrak{F}$ in U vollständig ist:
Sei p_k^{ij} die Peirce-k-Projektion von f_{ij} $(i \in I, j \in J, k = 0, 1/2, 1)$.
(9.4.16) Nach Wahl ist $(f_{rk})_{k \in K}$ eine vollständige kollineare Familie in U_{ro}. Sei $r \neq i \in I$. Durch Anwendung des Automorphismus R_iC_i aus (8.1.11) folgt, daß $(f_{ik})_{k \in K}$ eine vollständige kollineare Familie in U_{io} ist, denn man berechnet für $k \in K$: $R_iC_if_{rk} = R_if_{rk} = f_{ik}$, $R_iC_if_{rr} = R_if_{ri} = f_{ii}$, $R_iC_if_{ii} = f_{rr}$, und für $j \in I, i \neq j \neq r$: $C_if_{jj} = C_iR_jf_{rj} =$
$= R_jC_if_{rj} = R_jf_{rj} = f_{jj}$, genauso $R_if_{jj} = f_{jj}$, also $R_iC_if_{jj} = f_{jj}$, und es gilt $R_iC_i(U_{ro}) = U_{io}$.

Sei $o \neq z \in U$, $p_1^{ij}(z) = 0$ für alle $i \in I, j \in J$.

Weil $(f_{ii})_{i \in I}$ eine vollständige orthogonale Familie von Tripotenten in U ist, gibt es dann ein $i \in I$ mit $p_{1/2}^{ii}(z) \neq 0$. Wegen (8.1.13) folgt dann $p_{1/2}^{ii}(z) \in U_{io}$. Nach (9.4.16) und

(8.1.9)(3) gibt es dann aber ein $k \in K$ mit $p_1^{ik} p_{1/2}^{ii}(z) \neq 0$, d.h. $p_1^{ik}(z) \neq 0$ wegen der Verträglichkeit von $\mathfrak{F}$, ein Widerspruch.

Dies beendet den Beweis von (9.4.4).

Zusammen mit (2.11) erhält man (9.4.1). Qed

§ 9.5 Der antisymmetrische Typ

(9.5.1) Satz Sei U ein JBW*-Tripel vom antisymmetrischen Typ bezüglich eines vollständigen Tripotents e.
Dann ist U isometrisch isomorph zu
$L_w^\infty(T_1,\mu_1,C_{2n}^2) \oplus^\infty L_w^\infty(T_2,\mu_2,C_{2n+1}^2)$ für geeignete lokalkompakte Räume T_i mit positiven Radonmaßen μ_i (i = 1,2) und eine Kardinalzahl n.

Beweis: Nach Voraussetzung gibt es ein in $U_1(e)$ vollständiges antisymmetrisches Gitter $\mathfrak{F} := (f_{ij})_{\substack{i,j\in J\\ i<j}}$ mit card $J \geq 4$ und card J gerade (8.2.5).
Sei $J = K \dot\cup L, j: K \longrightarrow L$ eine Bijektion, $e_k := f_{kj(k)}$ $(k \in K)$.
Dann ist $(e_k)_{k\in K}$ eine vollständige orthogonale Familie von Tripotenten in $U_1(e)$ und $\sum_{k\in K} e_k$ ist unitär in $U_1(e)$. Nach (1.23) sind dann die Peirce-Räume von e und $\sum_{k\in K} e_k$ in U gleich, und nach (3.15) ist $(e_k)_{k\in K}$ eine auch in U vollständige orthogonale Familie. Sei daher oBdA $e = \sum_{k\in K} e_k$.
Für alle $i,j \in I, i \neq j$, ist $U(f_{ij}) = U$, denn $U(f_{ij})$ enthält $\mathfrak{F}$, damit auch $U_1(f_{kl})$ für alle $k,l \in J$; da $\mathfrak{F}$ in $U_1(e)$ vollständig und $U(f_{ij}) \cap U_1(e)$ in $U_1(e)$ komplementiert ist (5.2), folgt $U(f_{ij}) \cap U_1(e) = U_1(e)$ und damit $U = U(f_{ij})$.
Ein antisymmetrisches Gitter besteht aus abelschen Tripotenten (8.2.4).
Ist $V \neq 0$ ein $\mathfrak{z}^*$-abgeschlossenes Ideal in U mit natürlicher Projektion p, so ist $(p(f_{ij}))_{\substack{i,j\in J\\ i<j}}$ ein in $V_1(p(e))$ vollständiges antisymmetrisches Gitter. Wegen (9.2.12) gibt es eine Zerlegung von U in $\mathfrak{z}^*$-abgeschlossene Ideale U_m $(m \in M)$ mit natürlichen Projektionen p_m, so daß $(p_m(e_k))_{k\in K}$ m-homogene orthogonale Familien in U_m sind.
Seien $(U_m)_{rs}$ $(r,s \in K \dot\cup \{0\})$ die Peirce-Räume bezüglich $(p_m(e_k))_{k\in K}$ in U_m.
Man wähle $i,k \in K, m \in M$. Dann ist $W^{ik} := \bigoplus_{r,s=0,i,k} (U_m)_{rs}$ ein

σ^*-abgeschlossenes Untertripel von U_m (1.21) vom Typ $I_{2,5}$ bezüglich $p_m(e_i+e_k)$, denn durch $(p_m(f_{rs}))_{r,s=i,k,j(i),j(k)}$ ist nach (8.2.6) ein überdeckendes antisymmetrisches Gitter von $U_1(p_m(e_i+e_k))$ gegeben, und $U_1(p_m(e_i+e_k))$ ist nach (8.2.7) isomorph zu $L^\infty(T,\mu,C_4^2)$ für geeignete T,μ; C_4^2 ist aber isomorph zu C_6^4 [Lo2,4.18].

Aus (9.3.1) folgt daher $m = 1$ oder $m = 3$.

Sei $n := \operatorname{card} K$. Nach Voraussetzung ist U_1 isomorph zu $L_w^\infty(T_1,\mu_1,C_{2^n}^2)$ für geeignete T_1,μ_1.

Für $n = 2$ ist die Behauptung des Satzes vollständig in (9.3.1) enthalten. Sei daher im folgenden oBdA $U = U_3$ und $n > 2$, seien U_{rs} die Peirce-Räume bezüglich $(e_k)_{k\in K}$.

Es wird gezeigt, daß das Gitter $\mathfrak{F}$ fortgesetzt werden kann zu einem in U vollständigen antisymmetrischen Gitter $\mathfrak{F}' := (f_{ij})_{\substack{i,j\in J' \\ i<j}}$ ($J' := J \cup \{0\}$, $0 < J$), woraus dann die Behauptung mit (8.2.7) folgt.

Zur Vereinfachung der Notation seien $1,3 \in K$, $2 = j(1)$, $4 = j(3)$ (also $e_1 = f_{12}, e_3 = f_{34}$), sei $W := W^{13} := \bigoplus_{r,s=0,1,3} U_{rs}$.

Mit (f_{12},f_{34}) ist dann auch (f_{13},f_{24}) eine in W vollständige orthogonale Familie wegen $f_{12},f_{34} \in U_1(f_{13}+f_{24})$ und (1.23), und es ist $U_{1/2}(f_{13}) \cap U_{1/2}(f_{24}) \cap U_{1o} \subset U_1(f_{12}+f_{34}) \cap U_{1o} = 0 = U_o(f_{13}) \cap U_o(f_{24})$.

(9.5.2) Dann ist für $s = 0, 1/2$: $U_{1o} \cap U_s(f_{13}) = U_{1o} \cap U_{1/2-s}(f_{24})$ wegen der Verträglichkeit von $\mathfrak{F}$, und es gilt: $U_{1o} = U_{1o} \cap U_{1/2}(f_{13}) \oplus U_{1o} \cap U_{1/2}(f_{24})$.

Sei nun für kollineare f_{ij},f_{kl} $(i,j,k,l = 1,\ldots,4)$ T_{ijkl} der Austauschautomorphismus auf W gemäß [Mc,1.1].

(9.5.3) Sei f_{1o} ein in $U_{1o} \cap U_{1/2}(f_{13})$ vollständiges Tripotent. Dann ist $f_{12} \top f_{1o} \top f_{13}$:

Sei $g := 2\{f_{1o}f_{1o}^*f_{12}\}$. g ist eine f_{12}-Projektion mit $g \top f_{1o}$ (1.24). Angenommen, es sei $g \neq f_{12}$. Dann ist nach (9.2.10) W(g) ein echtes Ideal in W, das f_{1o} und damit $U_{1o} \cap U_{1/2}(f_{13})$ enthält. Sei $T := T_{1314} \circ T_{1323}$. Dann ist $T(U_{1o} \cap U_{1/2}(f_{13})) =$

$= U_{1o} \cap U_{1/2}(f_{24})$ nach [Mc,1.1] ,und aus der Definition der Austauschautomorphismen folgt (zusammen mit [Mc,(0.10)]) $T(W(g)) \subset W(g)$,also ist $U_{1o} \subset W(g)$ nach (9.5.2),und U_{1o} - damit W(g) - enthält wegen m = 3 ein zu f_{12} kollineares Tripotent.Damit ist auch $f_{12} \in W(g)$ und W(g) = W,ein Widerspruch.Daher ist $g = f_{12}$ und $f_{12} \top f_{1o}$.Aus $f_{1o} \in U_{1/2}(f_{13})$, $f_{12} \top f_{13}$ und (1.22) folgt $f_{1o} \top f_{13}$.

(9.5.4) $f_{ij} \perp f_{1o} \top f_{1i}$ für alle $i,j \in J\setminus\{1\}$,$i \neq j$:
Ist $i \neq 2 \neq j$,so ist $f_{ij} \perp f_{12}$,und f_{ij} liegt nach (1.21) in einem zu U_{1o} orthogonalen Peirce-Raum bezüglich $(e_k)_{k\in K}$, also ist $f_{ij} \perp f_{1o}$.
Ferner ist $f_{2j} = 2\{f_{24}f_{14}^{*}f_{1j}\}$ für $1 \in J\setminus\{j,1,\ldots,4\}$ nach (8.2.1)(ii) (beachte $n > 2$).Aus $f_{24} \perp f_{1o}$ (9.5.2) folgt dann mit (1.13):$f_{2j} \perp f_{1o}$.
Weiter ist $f_{1i} = 2\{f_{13}f_{13}^{*}f_{1i}\}$ für $i \neq 1,2,3;1 \in J\setminus\{i,1,2,3\}$.
Daraus folgt $f_{1i} \in U_{1/2}(f_{1o})$ und wegen $f_{1i} \top f_{12} \top f_{1o}$ mit (1.22):$f_{1i} \top f_{1o}$.Für $f_{12} \top f_{1o} \top f_{13}$ siehe (9.5.3).
Man setze nun:
$f_{3o} := 2\{f_{32}f_{12}^{*}f_{1o}\}$,$f_{jo} := 2\{f_{j3}f_{13}^{*}f_{1o}\}$ $(j \in J\setminus\{1,3\})$,
$f_{ok} := -f_{ko}$ $(k \in J)$.
Es wird nun gezeigt,daß $\mathfrak{F} := (f_{ij})_{\substack{i,j\in J\\ i<j}}$ ein vollständiges antisymmetrisches Gitter in U ist. Nach (8.1.3) sind
(9.5.5) $(f_{32},f_{12},f_{1o},f_{3o})$ und
(9.5.6) $(f_{j3},f_{13},f_{1o},f_{jo})$ Vierecke für $j \in J\setminus\{1,3\}$.
(9.5.7) Für paarweise verschiedene $j,r,s \in J$ ist $f_{rs} \perp f_{jo}$ und $f_{js} \top f_{jo} \top f_{ro}$:
Aus den Definitionen und (9.5.4) folgt mit (1.13):$f_{rs} \perp f_{jo}$.
Sei nun j = 1:Nach (9.5.4) ist $f_{1o} \top f_{1s}$ für $1 \neq s \in J$.
j = 3,s = 1:Dann ist nach [Mc,1.1] und (9.5.5):$T_{3212}(f_{1o}) = -f_{3o}$ und $T_{3212}(f_{13}) = -f_{13}$.Aus $f_{1o} \top f_{13}$ folgt daher $f_{3o} \top f_{31}$.
j = 3,s ≠ 1:Dann ist $T_{3212}(f_{1o}) = -f_{3o}$ und $T_{3212}(f_{1s}) \in \{f_{3s},-f_{3s}\}$,und aus $f_{1o} \top f_{1s}$ folgt $f_{3o} \top f_{3s}$.
j ≠ 1,3:Dann ist nach [Mc,1.1] und (9.5.6):$T_{j313}(f_{1o}) = -f_{jo}$

und $T_{j313}(f_{1s}) \in \{f_{js}, -f_{js}\}$, daher $f_{jo} \top f_{js}$.
Damit ist $f_{jo} \top f_{js}$ für alle $j,s \in J, j \neq s$, gezeigt.
Aus (9.5.5) und (9.5.6) folgt $f_{jo} \top f_{1o}$ für alle $j \in J \setminus \{1\}$ sowie - mit Hilfe von (1.13) und dem gerade Bewiesenen - $f_{ro} \in U_{1/2}(f_{jo})$ für alle $r \in J \setminus \{1,j\}$. Mit (1.22) folgt dann $f_{ro} \top f_{jo}$.
Damit erfüllt also $\mathcal{F}'$ die Relationen (8.2.2)(iii).
(9.5.8) Für alle $k \in K$ ist $U_{ko} = U_1(f_{ko}) \oplus U_1(f_{j(k)o})$:
$(e_k)_{k \in K}$ ist 3-homogen, nach (9.5.7) sind $f_{ko}, f_{j(k)o} \in U_{ko}$, und $e_k, f_{ko}, f_{j(k)o}$ sind paarweise streng kollinear.
(9.5.8) folgt dann aus (9.2.5).
(9.5.9) Die Familie $(p_1^{ij})_{i,j \in J'}$ der Peirce-1-Projektionen von f_{ij} in U ist treu:
Wegen der Vollständigkeit von $\mathcal{F}$ in $U_1(e)$ und der Verträglichkeit von $\mathcal{F} \cup \{e\}$ ist nur zu zeigen, daß es für $0 \neq z \in U_{1/2}(e)$ ein $j \in J$ gibt mit $p_1^{jo}(z) \neq 0$, was aus (9.5.8) und der Vollständigkeit der orthogonalen Familie $(e_k)_{k \in K}$ in U folgt.
(9.5.10) $(f_{ij})_{0 \leq i < j \leq 4}$ ist ein antisymmetrisches Gitter:
Dazu ist zu zeigen, daß $(f_{ij})_{0 \leq i < j \leq 4}$ die Relationen in (8.2.8) erfüllt: (8.2.8)(iii) ergibt sich aus (9.5.6).
Da $(f_{ij})_{1 \leq i < j \leq 4}$ nach Voraussetzung ein antisymmetrisches Gitter ist, ist wegen (9.5.7) nur noch (8.2.8)(i) nachzuprüfen: T_{3234}, angewandt auf (9.5.5), ergibt:
(9.5.11) $(f_{34}, f_{14}, f_{1o}, f_{3o})$ ist ein Viereck, insbesondere ist $f_{14} = 2\{f_{1o} f_{3o}^* f_{34}\}$. T_{3132}, angewandt auf (9.5.11), ergibt:
$(f_{34}, f_{24}, f_{2o}, f_{3o})$ ist ein Viereck, insbesondere ist $f_{24} = 2\{f_{2o} f_{3o}^* f_{34}\}$.
Damit ist (9.5.10) gezeigt.
Um zu zeigen, daß $\mathcal{F}'$ ein antisymmetrisches Gitter ist, muß man nachweisen, daß für paarweise verschiedene $i,j,k,l \in J'$ $(f_{ij}, f_{kj}, f_{kl}, f_{il})$ ein Viereck ist. Wegen (9.5.10) genügt es dazu, zu jedem $p \in \{1,\ldots,4\}$ und $q \in J \setminus \{1,\ldots,4\}$ einen Automorphismus C_{pq} von U zu finden mit $C_{pq}(f_{qs}) = f_{ps}$ und $C_{pq}(f_{rs}) = f_{rs}$ für alle $r,s \in J' \setminus \{p,q\}$.

Dies geschieht mit Hilfe der symplektischen Austauschautomorphismen $\widetilde{T}^{(k)}_{g_1,g_2}$ aus [Mc,1.7],wobei g_1 und g_2 in ein Viereck (g_1,g_2,g_3,g_4) eingebettete Tripotente und k ein zu $g_1,\dots,g_4$ streng kollineares Tripotent ist,so daß

(9.5.12) $\bigcap_{i=1,2} U_o(g_i) \cap \bigcap_{i=3,4} U_{1/2}(g_i) \subset U_o(k)$ und

(9.5.13) $\bigcap_{i=1,\dots,4} U_{1/2}(g_i) \subset U_1(k) + U_o(k)$ ist.(s.[Mc,1.7(i)])

Für paarweise verschiedene $p,q,i,j \in J$ ist $(f_{pi},f_{qi},f_{qj},f_{pj})$ ein Viereck,zu dessen Elementen f_{pq} streng kollinear ist. Wegen (9.5.7) und (9.5.9) sowie der Verträglichkeit von $(f_{rs})_{r,s\in J'}$ ist $U_o(f_{pi}) \cap U_o(f_{qi}) \subset U_o(f_{pq})$,daher gilt (9.5.12) für $g_1 := f_{pi}, g_2 := f_{qi}, g_3 := f_{qj}, g_4 := f_{pj}, k := f_{pq}$,und $U_{1/2}(f_{pi}) \cap U_{1/2}(f_{qi}) \cap U_{1/2}(f_{qj}) \cap U_{1/2}(f_{pj}) = U_1(f_{pq}) \oplus U_1(f_{ij})$,daher gilt (9.5.13) für dieselbe Wahl von $g_1,\dots,g_4,k$.

Man setze $C^{(i)}_{pq} := \widetilde{T}^{(f_{pq})}_{f_{pi},f_{qi}}$ $\quad (i \in J \setminus \{p,q\})$.

$C^{(i)}_{pq}$ ist nach [Mc,1.7] ein Automorphismus von U,der nach [Mc,4.3(iv)] für $r,s \in J$ das Gewünschte leistet,weil nach Voraussetzung $(f_{ij})_{\substack{i,j\in J\\ i<j}}$ ein antisymmetrisches Gitter ist.

Setzt man $i = 2$ für $p = 3$ und $i = 3$ sonst in der Definition von $C^{(i)}_{pq} =: C_{pq}$,so rechnet man den Rest der Behauptung,d.h. $C_{pq}(f_{qo}) = f_{po}$ und $C_{pq}(f_{ro}) = f_{ro}$ für $r \neq p,q$,mit Hilfe von [Mc,1.7(iii)] ,(9.5.10) und der Definition von f_{so} $(s \in J)$ leicht nach.

$\mathfrak{F}' = (f_{ij})_{\substack{i,j\in J'\\ i<j}}$ ist also ein wegen (9.5.9) in U vollständiges antisymmetrisches Gitter.Unter Berücksichtigung von (2.11) ist damit (9.5.1) gezeigt. Qed

§ 9.6 Der symmetrische Typ

Bei diesem - wie bei dem folgenden - Typ ergeben sich über die aus JBW*-Algebren vom entsprechenden Typ gemäß (2.15) entstehenden JBW*-Tripel hinaus keine weiteren.

(9.6.1) Satz Sei U ein JBW*-Tripel vom symmetrischen Typ bezüglich eines vollständigen Tripotents e.
Dann ist e unitär, d.h. U ist isometrisch isomorph zu $L_w^\infty(T,\mu,C_n^3)$ für einen lokalkompakten Raum T mit positivem Radonmaß μ und eine Kardinalzahl n.

Beweis: Nach Voraussetzung ist $U_1(e)$ (isometrisch) $*$-isomorph zu $L_w^\infty(T,\mu,A_n^3)$ für geeignete T,μ,n.
A_n^3 enthält eine orthogonale Familie minimaler Projektionen $(f_i)_{i\in I}$ mit $\sum_{i\in I} f_i = 1$, so daß für $i,j\in I, i\neq j$, der Peirce-1-Raum von f_i+f_j $*$-isomorph zu A_2^3 ist (vgl. [Ka3,§3]). Aber nach [Lo2,4.18(4)] zusammen mit (6.6) ist $A_2^3 = A_3^4$.
Also enthält nach (6.14) U eine orthogonale Familie $(e_i)_{i\in I}$ abelscher Tripotente mit $\sum_{i\in I} e_i = e$, so daß $U_1(e_i+e_j)$ für $i,j\in I, i\neq j$, eine JBW*-Algebra vom Typ $I_{2,2}$ ist. Wegen der Vollständigkeit von e in U und $\sum_{i\in I} e_i = e$ ist $(e_i)_{i\in I}$ vollständig in U (3.15).
Seien U_{kl} $(k,l\in I\cup\{0\})$ die Peirce-Räume bezüglich $(e_i)_{i\in I}$ in U. Für $i,j\in I, i\neq j$, ist dann $W_{ij} := U_1(e_i+e_j)+U_{io}+U_{jo} = \bigoplus_{k,l=0,i,j} U_{kl}$ ein $\overline{\ }^*$-abgeschlossenes Untertripel von U (1.21), also ein JBW*-Tripel vom Typ $I_{2,2}$ bezüglich e_i+e_j.
Dann folgt aus (9.3.1): e_i+e_j ist unitär in W_{ij}, d.h. es ist $U_{io} = U_{jo} = 0$.
Damit ist e unitär in U. Qed

§ 9.7 Der Ausnahme-Typ

(9.7.1) Satz Sei U ein JBW*-Tripel vom Ausnahme-Typ bezüglich eines vollständigen Tripotents e.
Dann ist e unitär, d.h. U ist isometrisch isomorph zu $L^\infty(T,\mu,C^6)$ für einen lokalkompakten Raum T mit positivem Radonmaß μ.

Beweis: Nach Voraussetzung ist $U_1(e)$ (isometrisch) *-isomorph zu $L^\infty(T,\mu,A^6)$ für geeignete T,μ.
Sei (f_1,f_2,f_3) eine (vollständige) orthogonale Familie minimaler Projektionen in A^6 mit $f_1+f_2+f_3 = 1$.
Für $i,j \in \{1,2,3\}, i \neq j$, ist der Peirce-1-Raum von f_i+f_j in A^6 ein einfaches, atomares Hermitesches Jordan-Tripelsystem vom Rang 2 und der Dimension 10, wie aus [Ka3, (3.3) und (2.14)] folgt. Dieser ist daher (als JB*-Tripel) isomorph zu C^4_{10}, wie aus der Existenz eines unitären Tripotents und der Klassifikation der endlich-dimensionalen Hermiteschen Jordan-Tripelsysteme [Ka3, (3.4)] folgt, und somit (wegen (6.6)) als JB*-Algebra *-isomorph zu A^4_{10}.
(Das Ergebnis läßt sich auch direkt nachprüfen.)
Wegen (6.14) enthält dann U eine vollständige orthogonale Familie (e_1,e_2,e_3) abelscher Tripotente mit $e_1+e_2+e_3 = e$, so daß für $i,j \in \{1,2,3\}, i \neq j$, $U_1(e_i+e_j)$ eine JBW*-Algebra vom Typ $I_{2,9}$ ist.
Seien U_{kl} $(k,l \in \{0,1,2,3\})$ die Peirce-Räume bezüglich (e_1,e_2,e_3) in U. Für $i,j \in \{1,2,3\}, i \neq j$, ist dann $W_{ij} := U_1(e_i+e_j) + U_{io} + U_{jo}$ ein σ^*-abgeschlossenes Untertripel von U (1.21), also ein JBW*-Tripel vom Typ $I_{2,9}$ bezüglich e_i+e_j, und aus (9.3.1) folgt, daß e_i+e_j unitär in W_{ij} und somit $U_{io} = U_{jo} = 0$ ist.
Daher ist e unitär in U. Qed

Beweis des Klassifikationssatzes (9.1.1):

In (9.1.4) wurde (unter Benutzung der Klassifikation der JBW*-Algebren vom Typ I) gezeigt,daß ein JBW*-Tripel vom Typ I ℓ^∞-direkte Summe von σ^*-abgeschlossenen Idealen ist, die bezüglich eines geeigneten vollständigen Tripotents von einem der in (9.1.3) angegebenen Typen sind.Es genügt daher,die Behauptung (9.1.1) für JBW*-Tripel dieser Bauart zu zeigen.Für den Typ I_1 geschieht dies in (9.2.2),für den Typ $I_{2,n}$ ($n \geq 2, n \neq 3$) in (9.3.1),für den rechteckigen Typ (einschließlich Typ $I_{2,3}$) in (9.4.1),für den antisymmetrischen Typ in (9.5.1),für den symmetrischen Typ in (9.6.1) und für den Ausnahme-Typ in (9.7.1). Qed

Literaturverzeichnis

[A1] Alfsen,E.M.,Hanche-Olsen,H.,Shultz,F.W.:State spaces of C^*-algebras.Acta Math.144(1980),267-305.

[A2] Alfsen,E.M.,Shultz,F.W.,Stormer,E.:A Gelfand-Neumark theorem for Jordan algebras.Advances in Math.28(1978), 11-56.

[Bi] Bishop,E.,Phelps,R.R.:A proof that every Banach space is subreflexive.Bull.Amer.Math.Soc.67(1961),97-98.

[Bon] Bonsall,F.F.,Duncan,J.:Numerical ranges of operators on normed spaces and of elements of normed algebras. Cambridge:University Press 1971.

[Bo1] Bourbaki,N.:Eléments de mathématique.Intégration Ch I-IV.2.Auflage.Paris:Hermann 1965.

[Bo2] Bourbaki,N.:Eléments de mathématique.Intégration Ch V.2.Auflage.Paris:Hermann 1967.

[Br1] Braun,R.B.:Ein Gelfand-Neumark-Theorem für C^*-alternative Algebren.Habilitationsschrift.Tübingen 1980.

[Br2] Braun,R.B.:A Gelfand-Neumark theorem for C^*-alternative algebras.Math.Z.185(1984),225-242.

[Br3] Braun,R.B.,Kaup,W.,Upmeier,H.:A holomorphic characterization of Jordan C^*-algebras.Math.Z.161(1978), 277-290.

[D] Drucker,D.:Exceptional Lie algebras and the structure of hermitian symmetric spaces.Mem.Amer.Math.Soc.208 (1978).

[E] Edwards,C.M.:On Jordan W^*-algebras.Bull.Sc.Math.104 (1980),393-403.

[F1] Friedman,Y.,Russo,B.:Solution of the contractive projection problem.Preprint.University of California at Irvine 1983.

[F2] Friedman,Y.,Russo,B.:Structure of the predual of a JBW*-triple.Preprint.University of California at Irvine 1984.

[G] Godefroy,G.:Parties admissibles d'un espace de Banach. Applications.Ann.scient.Ec.Norm.Sup.4^{e}série,t.16 (1983),109-122.

[H] Hanche-Olsen,H.,Størmer,E.:Jordan operator algebras. London:Pitman 1984.

[Ha1] Harris,L.A.:Bounded symmetric homogeneous domains in infinite dimensional spaces.Proceedings on infinite dimensional holomorphy,Lexington(1973),13-40.Lecture Notes in Mathematics 364.Berlin,Heidelberg,New York: Springer 1974.

[Ha2] Harris,L.A.:A generalization of C^{*}-algebras.Proc. London Math.Soc.42(1981),331-361.

[Io] Ionescu-Tulcea,A. und C.:Topics in the theory of lifting.Berlin,Heidelberg,New York:Springer 1969.

[Ja1] Jacobson,N.:A Kronecker factorization theorem for Cayley algebras and the exceptional simple Jordan algebra.Amer.J.Math.76(1954),447-452.

[Ja2] Jacobson,N.:Structure and representations of Jordan algebras.Amer.Math.Soc.Colloquium Publications Vol XXXIX.Providence 1968.

[Jo] Jordan,P.,von Neumann,J.,Wigner,E.:On an algebraic generalization of the quantum mechanical formalism. Ann.of Math.(2)35(1934),29-64.

[Ka1] Kaup,W.:Algebraic characterization of symmetric complex Banach manifolds.Math.Ann.228(1977),39-64.

[Ka2] Kaup,W.:Jordan algebras and holomorphy.In:Functional analysis,holomorphy and approximation theory. Proceedings,Rio de Janeiro(1978),341-365.Lecture Notes in Mathematics 843.Berlin,Heidelberg,New York:Springer 1981.

[Ka3] Kaup,W.:Über die Klassifikation der symmetrischen hermiteschen Mannigfaltigkeiten unendlicher Dimension. I.Math.Ann.257(1981),463-486.

[Ka4] Kaup,W.:A Riemann mapping theorem for bounded symmetric domains in complex Banach spaces.Math.Z.183 (1983),503-529.

[Ka5] Kaup,W.:Contractive projections on Jordan C*-algebras and generalizations.(erscheint in Math.Scand.)

[Ka6] Kaup,W.,Upmeier,H.:Jordan algebras and symmetric Siegel domains in Banach spaces.Math.Z.157(1977), 179-200.

[Ke] Kelley,J.L.:General topology.New York,Heidelberg, Berlin:Springer 1955.

[Kö] Köthe,G.:Topologische lineare Räume.I.Berlin,Göttingen,Heidelberg:Springer 1960.

[Li] Lindenstrauss,J.,Tzafriri,L.:Classical Banach spaces. Lecture Notes in Mathematics 338.Berlin,Heidelberg, New York:Springer 1973.

[Lo1] Loos,O.:Jordan pairs.Lecture Notes in Mathematics 460. Berlin,Heidelberg,New York:Springer 1975.

[Lo2] Loos,O.:Bounded symmetric domains and Jordan pairs. Mathematical lectures.Irvine:University of California at Irvine 1977.

[Lo3] Loos,O.,McCrimmon,K.:Speciality of Jordan triple systems.Comm.in Algebra 5(10) (1977),1057-1082.

[Mc] McCrimmon,K.,Meyberg,K.:Coordinatization of Jordan triple systems.Comm.in Algebra 9(14) (1981),1495-1524.

[Mc1] McCrimmon,K.:Jordan algebras and their applications. Bull.Amer.Math.Soc.84(1978),no.4,612-627.

[Me] Meyberg,K.:Lectures on algebras and triple systems. Lecture Notes.University of Virginia at Charlottesville 1972.

[Me1] Meyberg,K.:Jordan-Tripelsysteme und die Koecher-Konstruktion von Lie-Algebren.Math.Z.115(1970),58-78.

[N] Neher,E.:On Jordan triple systems with enough tripotents.Preprint.Universität Münster.o.J.

[P] Payá,R.,Pérez,J.,Rodríguez,A.:Noncommutative Jordan C*-algebras.man.math.37(1982),87-120.

[Sa] Sakai,S.:C^*-algebras and W^*-algebras.Berlin,Heidelberg,New York:Springer 1971.

[Sch] Schaefer,H.H.:Topological vector spaces.New York, Heidelberg,Berlin:Springer 1971.

[Scha] Schafer,R.D.:An introduction to nonassociative algebras.New York,London:Academic Press 1966.

[Sh] Shultz,F.W.:On normed Jordan algebras which are Banach dual spaces.J.Funct.Anal.31(1979),360-376.

[Si] Sinclair,A.M.:The norm of a hermitian element in a Banach algebra.Proc.Amer.Math.Soc.28(1971),446-450.

[St1] Stacey,P.J.:The structure of type I JBW-algebras. Math.Proc.Camb.Phil.Soc.90(1981),477-482.

[St2] Stacey,P.J.:Type I_2 JBW-algebras.Quart.J.Math.Oxford (2) 33(1982),115-127.

[Sto] Størmer,E.:Jordan algebras of type I.Acta Math.115 (1966),165-184.

[Ta] Takesaki,M.:Theory of operator algebras.New York, Heidelberg,Berlin:Springer 1979.

[To] Topping,D.M.:Jordan algebras of self-adjoint operators.Mem.Amer.Math.Soc.53(1965).

[W] Wright,J.D.M.:Jordan C^*-algebras.Mich.Math.J.24(1977), 291-302.

[Y1] Youngson,M.A.:Non-unital Banach Jordan algebras and C^*-triple systems.Proc.Edinb.Math.Soc.24(1979),19-29.

[Y2] Youngson,M.A.:A Vidav theorem for Banach Jordan algebras.Math.Proc.Camb.Phil.Soc.84(1978),263-272.

[Ka4] Kaup,W.:A Riemann mapping theorem for bounded symmetric domains in complex Banach spaces.Math.Z.183 (1983),503-529.

[Ka5] Kaup,W.:Contractive projections on Jordan C^*-algebras and generalizations.(erscheint in Math.Scand.)

[Ka6] Kaup,W.,Upmeier,H.:Jordan algebras and symmetric Siegel domains in Banach spaces.Math.Z.157(1977), 179-200.

[Ke] Kelley,J.L.:General topology.New York,Heidelberg, Berlin:Springer 1955.

[Kö] Köthe,G.:Topologische lineare Räume.I.Berlin,Göttingen,Heidelberg:Springer 1960.

[Li] Lindenstrauss,J.,Tzafriri,L.:Classical Banach spaces. Lecture Notes in Mathematics 338.Berlin,Heidelberg, New York:Springer 1973.

[Lo1] Loos,O.:Jordan pairs.Lecture Notes in Mathematics 460. Berlin,Heidelberg,New York:Springer 1975.

[Lo2] Loos,O.:Bounded symmetric domains and Jordan pairs. Mathematical lectures.Irvine:University of California at Irvine 1977.

[Lo3] Loos,O.,McCrimmon,K.:Speciality of Jordan triple systems.Comm.in Algebra 5(10) (1977),1057-1082.

[Mc] McCrimmon,K.,Meyberg,K.:Coordinatization of Jordan triple systems.Comm.in Algebra 9(14) (1981),1495-1524.

[Mc1] McCrimmon,K.:Jordan algebras and their applications. Bull.Amer.Math.Soc.84(1978),no.4,612-627.

[Me] Meyberg,K.:Lectures on algebras and triple systems. Lecture Notes.University of Virginia at Charlottesville 1972.

[Me1] Meyberg,K.:Jordan-Tripelsysteme und die Koecher-Konstruktion von Lie-Algebren.Math.Z.115(1970),58-78.

[N] Neher,E.:On Jordan triple systems with enough tripotents.Preprint.Universität Münster.o.J.

[P] Payá,R.,Pérez,J.,Rodríguez,A.:Noncommutative Jordan C^*-algebras.man.math.37(1982),87-120.

[Sa] Sakai,S.:C^*-algebras and W^*-algebras.Berlin,Heidelberg,New York:Springer 1971.

[Sch] Schaefer,H.H.:Topological vector spaces.New York, Heidelberg,Berlin:Springer 1971.

[Scha] Schafer,R.D.:An introduction to nonassociative algebras.New York,London:Academic Press 1966.

[Sh] Shultz,F.W.:On normed Jordan algebras which are Banach dual spaces.J.Funct.Anal.31(1979),360-376.

[Si] Sinclair,A.M.:The norm of a hermitian element in a Banach algebra.Proc.Amer.Math.Soc.28(1971),446-450.

[St1] Stacey,P.J.:The structure of type I JBW-algebras. Math.Proc.Camb.Phil.Soc.90(1981),477-482.

[St2] Stacey,P.J.:Type I_2 JBW-algebras.Quart.J.Math.Oxford (2) 33(1982),115-127.

[Sto] Stormer,E.:Jordan algebras of type I.Acta Math.115 (1966),165-184.

[Ta] Takesaki,M.:Theory of operator algebras.New York, Heidelberg,Berlin:Springer 1979.

[To] Topping,D.M.:Jordan algebras of self-adjoint operators.Mem.Amer.Math.Soc.53(1965).

[W] Wright,J.D.M.:Jordan C^*-algebras.Mich.Math.J.24(1977), 291-302.

[Y1] Youngson,M.A.:Non-unital Banach Jordan algebras and C^*-triple systems.Proc.Edinb.Math.Soc.24(1979),19-29.

[Y2] Youngson,M.A.:A Vidav theorem for Banach Jordan algebras.Math.Proc.Camb.Phil.Soc.84(1978),263-272.

Liste der Bezeichnungen

Für einen normierten Raum U und $r \in \mathbb{R}_+^*$ sei U^r die Kugel um 0 mit Radius r.

Für Banachräume U,V sei $\mathcal{L}(U,V)$ der Banachraum aller beschränkten linearen Operatoren von U in V,versehen mit der Operatornorm.

Sei $\mathcal{L}(U) := \mathcal{L}(U,U)$.

Für $A \in \mathcal{L}(U)$ sei $\sigma(A)$ das Spektrum von A.

$A \in \mathcal{L}(U)$ heiße hermitesch,wenn $\exp(itA) \in \mathcal{L}(U)$ für alle $t \in \mathbb{R}$ eine Isometrie ist.

U^* sei der topologische Dual von U.

Für $A \in \mathcal{L}(U,V)$ sei ${}^tA \in \mathcal{L}(V^*,U^*)$ die adjungierte Abbildung.

Für eine Dualität von Vektorräumen $\langle U,V \rangle$ bezeichne $\sigma(U,V)$ die schwache Topologie.Für einen Banachraum V wird $\sigma(V^*,V)$ auch mit σ^* bezeichnet.

Für eine Teilmenge W von U sei W° die Polare von W in V.

Skalarprodukte in Hilberträumen seien immer mit (.|.) bezeichnet.

Für eine Familie $(U_i)_{i\in I}$ von Vektorräumen bezeichne $\bigoplus_{i\in I} U_i$ die algebraisch direkte Summe.

Für eine Familie $(U_i)_{i\in I}$ von Banachräumen und $1 \leq p \leq \infty$ sei $\bigoplus_{i\in I}^p U_i := \{(u_i)_{i\in I} \mid \forall i \in I\ u_i \in U_i, \|(u_i)_{i\in I}\|_p < \infty\}$,

wobei $\|(u_i)_{i\in I}\|_p := (\sum_{i\in I} \|u_i\|^p)^{1/p}$ für $1 \leq p < \infty$ und

$\|(u_i)_{i\in I}\|_\infty := \sup\{\|u_i\| \mid i \in I\}$.

Sei $\ell^p(\mathbb{N}) := \bigoplus_{n\in\mathbb{N}}^p \mathbb{C}$,sei $c_o(\mathbb{N}) \subset \ell^\infty(\mathbb{N})$ der Unterraum der komplexen Nullfolgen,sei $c(\mathbb{N}) \subset \ell^\infty(\mathbb{N})$ der Unterraum der konvergenten komplexen Folgen.

Für einen kompakten topologischen Raum X und einen Banachraum U sei $\mathcal{C}(X,U)$ der Banachraum der stetigen Funktionen von X in U,versehen mit der Supremumsnorm.

Für Vektorräume U und V bezeichne $U \otimes V$ das (algebraische) Tensorprodukt von U und V.

Lebenslauf

Ich wurde am 18.11.1954 als Sohn des Lehrerehepaars Berthold und Annemarie Horn in Stuttgart geboren.
Von 1961 bis 1965 besuchte ich die Grundschule in Stuttgart-Neuwirtshaus, ab 1965 besuchte ich das Gymnasium Korntal, an dem ich 1973 das Abitur ablegte.
Im Wintersemester 1973/74 begann ich das Studium der Mathematik und der Physik an der Universität Stuttgart, das ich im Wintersemester 1975/76 an der Universität Tübingen fortsetzte.
Das Studienjahr 1976/77 verbrachte ich an der Universität London.
Im Herbst 1979 bestand ich das Staatsexamen in Mathematik, im Herbst 1980 das Staatsexamen in Physik.
Seit 1978 bin ich am Mathematischen Institut der Universität Tübingen als Wissenschaftliche Hilfskraft tätig, seit 1982 (mit einer halbjährigen Unterbrechung) als Wissenschaftlicher Angestellter.

Meine akademischen Lehrer waren die Herren Professoren Grimeisen, Hähl, Heyer, Hoffmann, Kaup, Nagel, Pfister, Salzmann, Schaal, Schlotterbeck, Staudt, Tamaschke, Weidlich, Werner, Wolf.